

Projet Personnel en Laboratoire

Analyse multifractale de l'intermittence  
de la cascade d'ensrophie en turbulence 2D

Jérémie Bec

mars-juin 1998

# Analyse multifractale de l'intermittence de la cascade d'énstrophie en turbulence 2D

## Table des matières

<b>Présentation de l'étude</b>	<b>3</b>
<b>1 Turbulence incompressible</b>	<b>3</b>
1.1 Les caractères des écoulements turbulents . . . . .	3
1.2 Dynamique de la turbulence . . . . .	4
1.3 Phénoménologie de la turbulence tridimensionnelle - Hypothèses de Kolmogorov (K41) . . . . .	5
1.4 Intermittence . . . . .	6
1.4.1 $\beta$ -modèle . . . . .	7
1.4.2 $\alpha$ -modèle . . . . .	8
1.4.3 Multifractalité et classes d'universalité . . . . .	9
<b>2 Turbulence bidimensionnelle</b>	<b>10</b>
2.1 Dynamique . . . . .	10
2.2 Théorie statistique . . . . .	11
2.3 Phénoménologie . . . . .	11
2.4 Données numériques d'un écoulement bidimensionnel turbulent . . . . .	12
<b>3 Analyse d'un écoulement bidimensionnel</b>	<b>13</b>
3.1 Phénoménologie de Batchelor - Kraichnan . . . . .	13
3.2 Détermination des paramètres de multifractalité . . . . .	14
3.2.1 Double Trace Moment . . . . .	14
3.2.2 Utilisation des fonctions de structure . . . . .	16
3.3 Résultats . . . . .	17
3.4 Perspectives pour dépasser les limites de l'étude actuelle . . . . .	18
<b>Conclusion</b>	<b>19</b>
<b>Références</b>	<b>20</b>

## Présentation de l'étude

Le but de ce projet est de déterminer, dans le cadre d'une modélisation multifractale, la loi universelle à laquelle obéit la cascade d'entrophie en turbulence bidimensionnelle. Ce projet, sous la tutelle de M. Daniel Schertzer, chercheur au Laboratoire de Modélisation en Mécanique du CNRS, a pour but de parcourir des simulations directes d'écoulements turbulents à l'aide d'outils d'analyse multifractale, tels que *Double Trace Moment* ou la méthode des fonctions de structure.

L'étude s'est découpée en trois phases :

- Collecte d'informations : il s'agissait là de se familiariser avec les différentes techniques de modélisation de la turbulence, et en particulier avec l'approche multifractale ; j'ai eu la possibilité de suivre les cours de turbulence dispensés par Mme Larchevêque dans le cadre du DEA de mécanique de Paris VI.
- Développement des algorithmes d'analyse multifractale : à partir d'une réadaptation au cadre d'écoulements bidimensionnels, des modules écrits par M. Patrice Martinez, qui réalise une thèse d'analyse multifractale en imagerie radar au sein de Thomson CSF ;
- Analyse des simulations et recherche d'une loi universelle : il s'agissait dans cette étape d'essayer d'interpréter, à l'aide des outils précédemment cités, le comportement dissipateur vers les petites échelles de l'entrophie ; des simulations directes de Navier-Stokes ont été mises à ma disposition par M. Vincent Herbert, qui vient d'effectuer une thèse de doctorat au Laboratoire de Modélisation en Mécanique.

Le présent document a pour but de présenter l'ensemble des travaux qui ont été effectués dans le cadre de ce projet. Après avoir succinctement rappelé les principales propriétés des écoulements turbulents ainsi que la modélisation multifractale de l'intermittence, la turbulence bidimensionnelle sera plus particulièrement étudiée. Par la suite, différentes méthodes d'analyse multifractale seront exposées ainsi que les résultats que nous avons pu obtenir au cours de cette étude.

## 1 Turbulence incompressible

### 1.1 Les caractères des écoulements turbulents

A partir de nos observations journalières, nous pouvons aisément effectuer une classification grossière des différents types d'écoulements fluides :

- Les écoulements laminaires sont caractérisés par un comportement régulier des variations de leurs différentes propriétés physiques (champs de vitesse, de température, de pression).
- Les écoulements turbulents concernent la plupart des écoulements fluides qui nous entourent ; ils présentent des caractères d'irrégularité et de désordre qui s'opposent aux propriétés des écoulements laminaires.

Une observation plus précise des différents régimes d'écoulements a été effectuée par Reynolds en 1894 : toutes conditions de l'expérience étant égales, la transition du régime laminaire au régime turbulent s'effectue dès que la valeur de la vitesse de l'écoulement franchit un certain seuil critique. De manière adimensionnelle, cette transition s'effectue dès lors que le nombre de Reynolds (cf. 1.2 3) dépasse une valeur critique constante.

Une définition générale et précise de la turbulence ne peut pas être donnée, mais on peut indiquer les caractéristiques des écoulements qui suivent ce type de comportement (Favre *et al* - 1976) :

**Caractère aléatoire :** dans un fluide en écoulement turbulent, les grandeurs physiques, comme les composantes de la vitesse, la température et la pression, présentent des fluctuations d'une telle irrégularité qu'il convient de les représenter par des variables aléatoires. Un écoulement turbulent comporte nécessairement des fluctuations intenses du rotationnel de la vitesse ; un écoulement irrotationnel ne peut donc pas être turbulent.

**Caractère non-linéaire :** le transfert d'énergie des fluctuations de vitesse à grande échelle vers les petites échelles est du même ordre de grandeur que l'énergie dissipée en chaleur par les effets de viscosité. Ce phénomène est lié aux interactions non linéaires qui sont représentées par les termes d'inertie dans les équations des écoulements turbulents.

**Caractère de diffusion :** l'agitation turbulente produit une diffusion à grande échelle des propriétés transportables de la matière. Les effets de cette diffusion dépassent très largement, en ordre de grandeur, ceux de la diffusion moléculaire.

**Caractère dissipatif :** la turbulence de l'écoulement rend plus intense la dissipation de l'énergie cinétique sous forme de chaleur, par l'effet de la viscosité.

## 1.2 Dynamique de la turbulence

La dynamique des écoulements fluides est régie par l'équation de Navier-Stokes :

$$\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \underline{u} \cdot \nabla \underline{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \underline{u} \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \underline{u} = 0 \quad (2)$$

+ conditions initiales et conditions aux limites

La difficulté mathématique des équations de Navier-Stokes provient du fait que le paramètre  $\nu$ , représentant la viscosité du fluide, tend vers 0 dans le cadre d'écoulements turbulents développés. Or ce paramètre apparaît dans le terme de dissipation  $\nu \nabla^2 \underline{u}$  qui contient le plus grand ordre de dérivation.

Il se crée ainsi une limite singulière puisque le terme de plus grand poids est alors celui d'advection non-linéaire,  $\underline{u} \cdot \nabla \underline{u}$ . On définit, pour représenter ce type de singularité, le

nombre de Reynolds, comme le rapport entre la contribution des termes non linéaires sur celle des termes linéaires.

Dans la pratique, il s'écrit sous la forme :

$$Re = \frac{VL}{\nu} \quad (3)$$

où  $V$  et  $L$  sont respectivement les ordres de grandeur de vitesse et de longueur caractéristiques de l'écoulement.

La condition d'incompressibilité représentée par l'équation (1), en tant qu'approximation, pose quelques problèmes physiques car elle implique une vitesse du son infinie. L'information d'une perturbation locale devrait alors être instantanément transmise à l'ensemble de l'écoulement.

Reynolds proposa en 1894 une décomposition du champ de vitesse en somme de la contribution principale  $\overline{u_i}$  et des fluctuations  $u'_i$ ; il réécrit les équations de Navier-Stokes pour pouvoir prédire le comportement de  $\overline{u_i}$  :

$$\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial t} + \overline{u_j} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \nu \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} - \overline{u'_i u'_j} \right) + \overline{F_i} \quad (4)$$

Complétée par

$$\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_i} = 0 \quad (5)$$

Pour résoudre cette équation, il faut calculer dans le second membre de (5) les corrélations du second ordre sur les fluctuations de vitesse, appelées tenseur de Reynolds. Ces corrélations dépendent en fait des corrélations du troisième ordre, qui dépendent elles-mêmes de celles du quatrième ordre, etc ... , et ceci jusqu'à l'infini.

Il s'agit là d'un problème de fermeture : il y a plus d'inconnues que d'équations. La stratégie traditionnelle pour résoudre cette hiérarchie d'équations est d'introduire une nouvelle équation ou un nouveau système issu d'une hypothèse phénoménologique.

### 1.3 Phénoménologie de la turbulence tridimensionnelle - Hypothèses de Kolmogorov (K41)

En 1941, Kolmogorov proposa une étude purement statistique des solutions des équations de Navier-Stokes en 3D, à la limite  $Re \rightarrow \infty$ . Il étudia particulièrement la manière dont l'énergie se distribue le long des différentes échelles de l'écoulement. La difficulté de cette approche réside dans le fait de considérer un système thermodynamique ouvert (dû à l'injection d'énergie par les forces extérieures et à sa dissipation par viscosité). Il supposa alors que les forces extérieures n'agissent que sur les grandes échelles, et que la dissipation visqueuse se fait sur les plus petites. Introduisant ainsi la notion d'échelle inertielle, il ne considéra qu'un transfert d'énergie des grandes vers les petites échelles, à un débit  $\varepsilon$  supposé constant. Il supposa de plus les écoulements turbulents statistiquement homogènes et isotropiques. Ces considérations le conduirent au modèle K41, régissant les évolutions de l'énergie dans les tourbillons de taille  $l$  :

$$\langle (\Delta u_l)^2 \rangle = C \varepsilon^{2/3} l^{2/3} \quad (6)$$

Cette équation correspond à la loi plus connue d'Obukhov, régissant les évolutions du spectre d'énergie, où  $k$  est le module du nombre d'onde moyenné sur toutes les directions, et correspondant à l'inverse de l'échelle :

$$E(k) = C\varepsilon^{2/3}k^{-5/3} \quad (7)$$

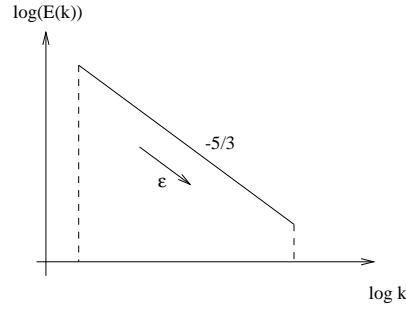


FIG. 1 – Kolmogorov Obukhov - Spectre d'énergie 3D

#### 1.4 Intermittence

Contrairement à l'hypothèse d'homogénéité de K41, on constate expérimentalement (Batchelor et Townsend - 1949) que l'agitation n'est pas répartie uniformément dans tout le fluide. Il apparaît une intermittence spatiale de l'écoulement. Les mouvements véritablement turbulents n'occupent qu'une fraction de l'espace disponible, d'autant plus petite que l'on observe les échelles de plus en plus petites.

Les petites échelles ne peuvent créer un surplus énergétique, mais peuvent seulement moduler multiplicativement la cascade d'énergie provenant des plus grandes échelles.

Le flux d'énergie transférée de l'échelle  $\lambda$  vers l'échelle  $\lambda'$  s'écrit :

$$\varepsilon_{\lambda\lambda'} = T_\lambda(\varepsilon_{\lambda'})\varepsilon_\lambda$$

où  $T_\lambda$  est la contraction spatiale de rapport  $\lambda (> 1)$ .

Une conséquence directe de l'équation précédente est l'existence d'un générateur pour le semi-groupe multiplicatif des flux d'énergie :

$$\varepsilon_\lambda = e^{\Gamma_\lambda}$$

où  $\Gamma_\lambda$  est ce générateur.

Il s'agit ici de déterminer et d'analyser les propriétés de ce générateur.

En définissant un rapport d'échelle  $\lambda_1$  (cf. figure 2), nous allons étudier le comportement du flux d'énergie à travers les différents pas de ce découpage. Nous considérerons que le flux d'énergie  $\varepsilon_{n+1}$ , de l'échelle  $\lambda$  vers l'échelle  $\lambda_1\lambda$  répond à la loi stochastique :

$$\varepsilon_{n+1} = \mu_\varepsilon \varepsilon_n$$

où  $\mu_\varepsilon$  est une variable aléatoire de moyenne 1. Nous devons en effet avoir la relation de conservation canonique :  $\langle \varepsilon_{n+1} \rangle = \langle \varepsilon_n \rangle$ . On a ainsi  $\langle \mu_\varepsilon \rangle = 1$ .

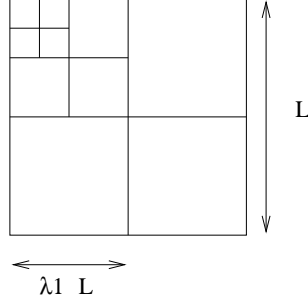


FIG. 2 – Définition d'un rapport d'échelle (ici  $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ )

#### 1.4.1 $\beta$ -modèle

(Frish, Sulem et Nelkin - 1978)

On considère que  $\mu_\varepsilon$  ne prend que deux valeurs :  $\mu_0$  et 0. La probabilité que  $\mu_\varepsilon$  soit différent de 0 s'écrit alors :

$$prob(\mu_\varepsilon > 0) = \frac{\text{Nombre d'occurrences où } \mu_\varepsilon > 0}{\text{Nombre total de } \mu_\varepsilon} = \frac{\lambda_1^D}{\lambda_1^d}$$

où  $d$  est la dimension de l'espace considéré, et  $D$  la dimension de l'espace fractal des sous-échelles où l'énergie se dissipe. En notant  $C = d - D$ , on obtient ainsi :

$$\begin{cases} prob(\mu_\varepsilon > 0) = \lambda_1^{-C} \\ prob(\mu_\varepsilon = 0) = 1 - \lambda_1^{-C} \end{cases}$$

En réécrivant la moyenne de cette variable aléatoire, il vient :

$$\varepsilon_0 = \lambda_1^C$$

Ceci conduit finalement au  $\beta$ -modèle :

$$\mu_\varepsilon = \begin{cases} \lambda_1^C & \text{avec la probabilité } \lambda_1^{-C} \\ 0 & \text{avec la probabilité } 1 - \lambda_1^{-C} \end{cases}$$

On obtient ainsi un ensemble monofractal de singularités :

$$\varepsilon_n = \begin{cases} (\lambda_1^n)^C \varepsilon_0 & \text{avec la probabilité } (\lambda_1^n)^{-C} \\ 0 & \text{avec la probabilité } 1 - (\lambda_1^n)^{-C} \end{cases}$$

L'introduction de cette modélisation fractale permet d'appréhender l'intermittence 3D, dans le cadre d'une cascade d'énergie, et de montrer que celle-ci n'affecte pas profondément la description phénoménologique de la turbulence tridimensionnelle. Ce modèle fait apparaître un ensemble fractal de singularités où la dissipation est non nulle. L'hypothèse consistant à considérer une éventuelle nullité du flux en une seule étape n'est pas recevable d'un point de vue physique et ceci a conduit à l'introduction d'un  $\alpha$ -modèle.

### 1.4.2 $\alpha$ -modèle

Le  $\alpha$ -modèle diffère du  $\beta$ -modèle par le fait que les structures dissipatives n'y sont plus soit mortes, soit vivantes : on considère maintenant que, à chaque étape de la cascade d'échelle, leur taux de dissipation est soit fort, soit faible. L'introduction du  $\alpha$ -modèle repose ainsi sur l'hypothèse que  $\mu_\varepsilon$  se comporte selon la loi :

$$\mu_\varepsilon = \begin{cases} \lambda_1^{\gamma_+} > 1 & \text{avec la probabilité } \lambda_1^{-C} \\ \lambda_1^{\gamma_-} < 1 & \text{avec la probabilité } 1 - \lambda_1^{-C} \end{cases}$$

NB : On retrouve le  $\beta$ -modèle dans le cas particulier où  $\gamma_- \rightarrow -\infty$ .

On déduit du fait que  $\langle \mu_\varepsilon \rangle = 1$ , que

$$\gamma_- < 0 < \gamma_+$$

A une échelle  $\lambda_1^n$  donnée, le flux d'énstrophie peut prendre  $n + 1$  valeurs différentes de la forme

$$(\lambda_1^{\gamma_{k,l}})\varepsilon_0$$

avec  $k + l = n$ , et où  $\gamma_{k,l} = \frac{k\gamma_+ + l\gamma_-}{k+l}$ .

On obtient ainsi une répartition non plus fractale, mais multifractale de singularités (cf. figure 3).

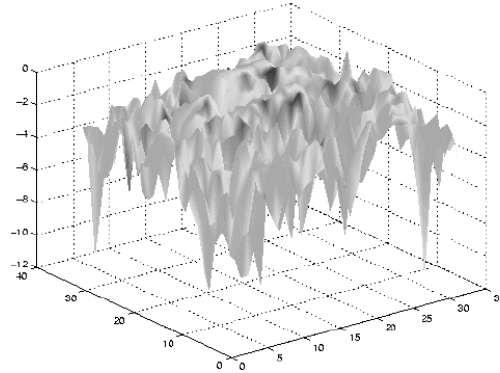


FIG. 3 – Répartition multifractale de singularités (nous avons ici utilisé un générateur de Lévy pour  $\alpha = 1.5$  et  $C_1 = 0.1$ )

En fixant  $\gamma$ , on se consacre à la probabilité que  $\mu_\lambda$  soit supérieure à la valeur  $\lambda^\gamma$ . Au premier ordre, on a :

$$prob(\varepsilon_\lambda \geq \lambda^\gamma) \sim \lambda^{-C(\gamma)}$$

Le moment statistique d'ordre  $q \geq 1$  s'écrit alors (Parisi et Frish - 1985) :

$$\langle \varepsilon_\lambda^q \rangle = \int \varepsilon_\lambda^q dP(\varepsilon_\lambda) = \int \lambda^{q\gamma - C(\gamma)} dC(\gamma)$$

et par transformation de Legendre, on a :

$$\langle \varepsilon_\lambda^q \rangle \sim \lambda^{K(q)} \quad (8)$$

où  $K(q) = \max_\gamma [q\gamma - C(\gamma)]$ . On a en fait  $\mu_\varepsilon = \lambda_1^\gamma$ , où  $\gamma$  est une variable aléatoire ; ce qui signifie :

$$\langle \mu_\varepsilon \rangle = \langle \lambda_1^{q\gamma} \rangle = \langle e^{ln(\lambda_1)q\gamma} \rangle = Z_\gamma(q)$$

où  $Z_\gamma(q)$  est la première fonction caractéristique de la variable aléatoire  $\gamma$ . Et on peut donc écrire :

$$Z_\gamma(q) = e^{ln(\lambda_1)K_1(q)}$$

où  $K_1(q)$  est la seconde fonction caractéristique. On a ainsi :

$$K(q) \sim ln(\lambda_1)K_1(q)$$

Tout repose maintenant dans le choix de la loi du générateur régissant le comportement de  $\gamma$ .

### 1.4.3 Multifractalité et classes d'universalité

On distingue deux types d'universalités :

- l'universalité forte qui correspond à un générateur stable par renormalisation ;
- l'universalité faible qui intervient lorsque le générateur et l'ensemble de ses itérés sont très peu corrélés, et ne sont plus stables par changement d'échelle ou renormalisation.

Les fonctions d'échelle universelles fortes  $K(q)$  et  $c(\gamma)$ , correspondant à un générateur stable de Lévy ( plus connu sous le nom "Log-Lévy") sont :

$$c(\gamma) = C_1 \left( \frac{\gamma}{C_1 \alpha'} + \frac{1}{\alpha} \right)^{\alpha'} ; K(q) = \frac{C_1}{\alpha - 1} (q^\alpha - q)$$

où on a introduit le paramètre  $\alpha$  compris entre 0 et 2.

C'est un générateur gaussien dans le cas où  $\alpha = 2$ . Pour  $\alpha = 0$ , on retrouve le  $\beta$ -modèle pour  $\alpha = 0$ . Introduire de tels générateurs présente un grand intérêt car ils sont stables par addition et attractifs (existence d'une généralisation du théorème central-limite pour ceux-ci).

Au contraire, les processus multifractals d'universalité faible suivent des lois statistiques de type "Log-Poisson" :

$$c(\gamma) = \left(1 - \frac{\gamma^+ - \gamma}{c\gamma^-}\right) \left(1 - \log \frac{\gamma^+ - \gamma}{c\gamma^-}\right) c \text{ si } \gamma \leq \gamma^+$$

$$c(\gamma) = \infty \text{ si } \gamma > \gamma^+$$

$$\text{et } K(q) = q\gamma^+ + (\lambda_1^{-q\gamma^-} - 1)c$$

qui tend vers le  $\alpha$ -modèle pour  $\lambda_1^N \rightarrow 1$  et  $N \rightarrow \infty$  (Schertzer *et al.* - 1995).

La manière traditionnelle de tester les différents modèles d'invariabilité par changement d'échelle est de comparer les estimations empiriques des moments statistiques aux valeurs théoriques correspondant aux différents modèles définis par des universalités fortes ou faibles. Ces modèles comportent généralement deux ou trois paramètres, qui sont déterminés soit par justifications théoriques, soit empiriquement.

Trois principales échelles qualitatives différentes apparaissent au cours de cette analyse :

- Aux échelles intermédiaires, les paramètres de structure des champs peuvent être aisément estimés empiriquement, et comparés aux modèles "Log-Lévy" ou "Log-Poisson".
- Aux petites échelles, en nous intéressant aux moments d'ordres peu élevés, nous pouvons remarquer l'éventuelle non-analyticité des processus suivant une loi de type "Log-Lévy". Ceci est un test direct permettant de distinguer simplement les fortes des faibles universalités.
- Les grandes échelles, associées à des moments élevés permettent de tester le modèle "Log-Poisson", dont les ordres de singularités sont bornés, tandis que le modèle "Log-Lévy" n'admet pas de borne.

## 2 Turbulence bidimensionnelle

La turbulence bidimensionnelle concerne les écoulements restant parallèles à certains plans. Ce concept est assez récent (Batchelor, Kraichnan - 1967). La considération à deux dimensions a été introduite d'une part dans le but d'étudier les problèmes de magnétohydrodynamique, d'astrophysique et d'écoulements géophysiques où la présence de forces extérieures (champ magnétique, force de Coriolis ...) conduit à considérer l'écoulement d'un point de vue bidimensionnel (Larчевêque - 1998). Mais surtout, cette modélisation est utilisée dans l'intention de développer les techniques numériques : un écoulement turbulent bidimensionnel se ramène à un champ scalaire turbulent, et demande ainsi de moins grandes capacités de calcul que dans le cas tridimensionnel.

### 2.1 Dynamique

En introduisant  $\underline{\omega} = \nabla \times \underline{u}$ , l'équation 1 peut se réécrire :

$$\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \underline{\omega} \times \underline{u} = -\nabla \left( \frac{p}{\rho} + \frac{\underline{u}^2}{2} \right) + \nu \nabla^2 \underline{u} \quad (9)$$

On élimine ensuite la pression en prenant le rotationnel de cette équation, et on obtient :

$$\frac{\partial \underline{\omega}}{\partial t} + \underline{u} \cdot \nabla \underline{\omega} = \underline{\omega} \cdot \nabla \underline{u} + \nu \nabla^2 \underline{\omega} \quad (10)$$

Dans le cadre d'un écoulement bidimensionnel,  $\underline{\omega}$  est perpendiculaire au plan de l'écoulement ;  $\omega$  est donc assimilable à un scalaire (il reste selon une direction fixe). De plus, comme  $\underline{u}$  et  $\underline{\omega}$  sont orthogonaux, le terme "d'étirement des lignes de tourbillon",  $\underline{\omega} \cdot \nabla \underline{u}$ , qui est fondamental en turbulence tridimensionnelle, est nul dans le cadre bidimensionnel. Ainsi  $\omega$  vérifie l'équation :

$$\frac{D\omega}{Dt} = \frac{\partial\omega}{\partial t} + \underline{u} \cdot \nabla\omega = \nu \nabla^2\omega \quad (11)$$

Mis à part les termes de dissipation moléculaire, le rotationnel  $\omega$  de la vitesse est donc conservé par le mouvement des particules fluides. Il en est de même pour toute puissance de  $\omega$ . Il en résulte donc qu'en écoulement bidimensionnel, l'enstrophie  $D = \frac{1}{2} \langle \omega^2 \rangle$  est une quantité conservée par les termes non-linéaires.

Le flux d'enstrophie, lié à la dissipation visqueuse dans l'écoulement est donné par :

$$\mu = \nu\omega\nabla^2\omega = \frac{\nu}{2}\nabla^2(\omega^2) - \nu(\nabla\omega)^2 \quad (12)$$

## 2.2 Théorie statistique

Batchelor et Kraichnan développèrent une théorie équivalente à K41 pour la turbulence 2D, qui prenait en compte, outre la conservation du flux d'énergie, la conservation du flux d'enstrophie (intégrale du carré de la vortacité), seulement vraie pour une équation d'Euler bidimensionnelle.

En effectuant les mêmes hypothèses que Kolmogorov, ils prédirent une cascade d'enstrophie directe des grandes vers les petites échelles. Il en résulte immédiatement que l'énergie cinétique turbulente  $E_c$  de l'écoulement reste constante puisque les équations de Navier-Stokes conduisent à :

$$\frac{dE_c}{dt} = -2\nu D$$

Batchelor a également proposé une hypothèse basée sur l'analyse de l'étirement des lignes d'isovortacité : dans la limite  $\nu$  tendant vers 0, l'enstrophie cascade vers les petites échelles et est dissipée à un taux fini  $\beta$ .

A partir de cette hypothèse, des arguments phénoménologiques classiques montrent que dans la zone inertielle de cascade d'enstrophie, associée aux nombres d'onde  $k$  tels que

$$k_I \ll k \ll k_D$$

où  $k_D = \beta^{\frac{1}{6}}\nu^{-\frac{1}{3}}$  est l'échelle de dissipation visqueuse, et  $k_I$  désigne l'inverse de l'échelle associée à une injection d'énergie à un taux constant :  $\varepsilon = \beta/k_I^2$ .

Le spectre d'enstrophie  $D(k)$  ne dépend que de  $\beta$  et de  $k$  et s'écrit :

$$Z(k) = C\beta^{\frac{2}{3}}k^{-1} \quad (13)$$

$C$  étant une constante adimensionnelle universelle.

## 2.3 Phénoménologie

Ces résultats induisent un spectre d'énergie en  $k^{-3}$ . Ce phénomène s'accompagne d'une cascade inverse d'énergie des petites vers les grandes échelles induisant un spectre en  $k^{-5/3}$  (cf. figure 4).

On distingue ainsi deux cas :

**La turbulence en décroissance libre** a lieu lorsqu'il n'y a pas de force extérieure agissant sur l'écoulement. La zone de cascade d'enstrophie existe. Le nombre de Reynolds,

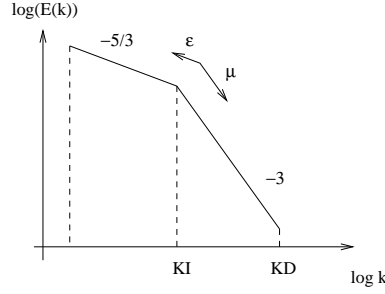


FIG. 4 – Spectre 2D - cascade d'enstrophie et cascade inverse d'énergie

ainsi que  $k_D$  et  $k_I$ , sont des fonctions décroissantes du temps. La zone de cascade inverse d'énergie n'existe quasiment pas.

**La turbulence entretenue** s'inscrit dans le cadre d'une turbulence quasi-stationnaire. L'énergie est injectée à l'échelle  $k_I$  à un taux constant  $\varepsilon$ . On observe alors une cascade d'enstrophie stationnaire ( $k_D, k_I$  et  $\beta = k_I^2 \varepsilon$  constants) ainsi qu'une cascade inverse d'énergie qui se développe vers les petits  $k$  avec le temps. La valeur minimale de cette cascade inverse se comporte en  $\varepsilon^{-\frac{1}{2}} t^{-\frac{3}{2}}$ , et ne peut donc être nulle que pour  $t \rightarrow \infty$ .

Une grande différence phénoménologique avec les écoulements tridimensionnels réside dans le fait que le temps d'établissement d'un spectre n'est pas fini.

Une phénoménologie plus raffinée peut être obtenue à partir d'un spectre de la forme (Kraichnan - 1971) :

$$E(k) = C \beta^{\frac{2}{3}} k^{-3} \left( \ln \frac{k}{k_i} \right)^{\frac{1}{3}} \text{ où } k_i \sim k_I \quad (14)$$

L'ensemble de cette théorie est vérifiée pour des modèles de fermeture en deux points (Pouquet *et al.* - 1975). Mais cette transcription bidimensionnelle de K41 ne permet en rien d'atteindre une modification sur la pente de  $E(k)$  qui serait en accord avec les simulations numériques directes (Herrnig *et al.* - 1974 ou Basdevant et Sadourny - 1983) qui engendrent des spectres plus pentus que  $k^{-3}$  (de l'ordre de  $k^{-4}$ ,  $k^{-5}$ ).

## 2.4 Données numériques d'un écoulement bidimensionnel turbulent

L'étude qui a été menée concerne un écoulement turbulent bidimensionnel en décroissance libre. Les simulations ont été effectuées par Vincent Herbert, dans le cadre de sa thèse de doctorat portant sur l'étude analytique et numérique des structures cohérentes en turbulence bidimensionnelle incompressible. L'écoulement sélectionné est celui qui fut utilisé par Mc Williams en 1984.

Les conditions aux limites sont de type périodique dans les deux directions de l'espace. L'écoulement de base est défini, dans l'espace de Fourier, par le spectre d'énergie initial :

$$E(k) = C \frac{k^6}{(k + 2k_I)^{18}}$$

où  $C$  est une constante égale à  $10^{23}$  et  $k_I$  représente le pic du spectre d'énergie initiale.

Le terme dissipatif utilisé est relatif à une dissipation hypervisqueuse d'ordre  $p$  (Basdevant - 1981) :

$$D = (-1)^{p+1} \nu_p \nabla^{2p} \omega \text{ avec ici } p = 6$$

Cette dissipation a pour effet de confiner la dissipation dans une bande étroite de modes et donc, d'élargir artificiellement la zone inertielle. Les écoulements simulés par ce type d'opérateur ont les caractéristiques des écoulements à grands nombres de Reynolds : ils présentent une zone inertielle importante et une énergie constante, et cela pour des simulations à résolutions modestes (ici,  $512^2$ ).

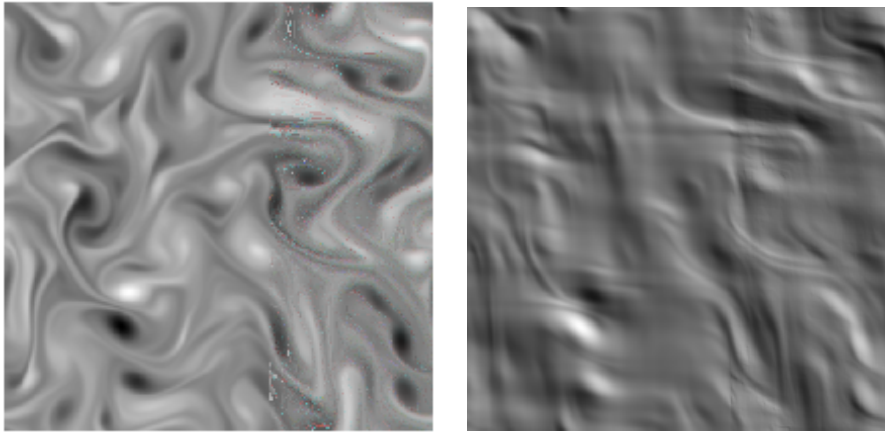


FIG. 5 – *Champ de vorticité et de flux d'énstrophie : cet écoulement révèle des contours de vorticité très bruités. Les valeurs les plus fortes du champ d'énstrophie apparaissent en blanc. Nous pouvons remarquer sur cette image que la dissipation de l'énstrophie se fait de façon localisée à l'extérieur de structures tourbillonnaires.*

### 3 Analyse d'un écoulement bidimensionnel

#### 3.1 Phénoménologie de Batchelor - Kraichnan

La phénoménologie classique (cf. 2.2 et 2.3) se base sur des hypothèses proches de celles de Kolmogorov dans le cadre tridimensionnel. Elle nous prédit un spectre de cascade d'énstrophie en

$$E(k) \sim k^{-\beta} \text{ avec } \beta = -3$$

Le tracé du spectre d'énergie de l'écoulement étudié (cf. figure 6 nous montre que l'on obtient en fait  $\beta \simeq 4.5$ .

Afin de déterminer les raisons de ce changement de pente, nous avons tenté d'effectuer une analyse de l'intermittence de la cascade d'énstrophie de cet écoulement.

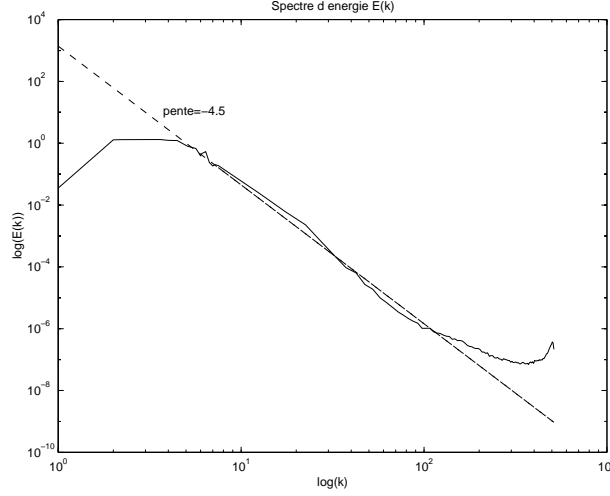


FIG. 6 – Le spectre d'énergie des simulations numériques a une pente en  $k^{-4,5}$ . La remonté du spectre d'énergie aux petites échelles est dûe aux effets conjugués de la très faible valeur de l'hyperviscosité et de l'ordre élevé de l'opérateur de dissipation choisi.

En supposant que le spectre d'énergie suit la loi corrigée (14) et en essayant de rechercher un comportement de  $\omega$  aux différentes échelles, on remarque que :

$$\omega(k) \sim \left( \int_{k_I}^k k^2 E(k) dk \right)^{\frac{1}{2}} \sim (k^3 E(k))^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{et donc } \omega(k) \sim (k^3 \beta^{\frac{2}{3}} k^{-3} (\ln \frac{k}{k_i})^{-\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}} = \beta^{\frac{1}{3}} (\ln \frac{k}{k_i})^{-\frac{1}{6}}$$

Ainsi  $\omega(k)$ , qui a la même dimension que l'inverse d'un temps, décroît en fonction de  $k$ . Ceci signifie que les temps caractéristiques de cisaillement des tourbillons augmentent lorsqu'on descend dans les petites échelles, contrairement au cas de la turbulence tridimensionnelle, où on a

$$\tau(k) \sim 1/kv(k) \sim \varepsilon^{-\frac{1}{3}} k^{-\frac{2}{3}}$$

Une accumulation d'énergie peut alors aisément avoir lieu aux petites échelles, ce qui peut en partie expliquer la remonté du spectre d'entrophie pour celle-ci.

## 3.2 Détermination des paramètres de multifractalité

### 3.2.1 Double Trace Moment

Lavallée (1991) a mis au point une technique d'estimation du paramètre multifractal  $\alpha$ , qui porte le nom de *Double Trace Moment*. Elle consiste à élever les données (de la plus petite résolution) à la puissance  $\eta$ , puis de calculer ensuite les différents moments à différentes résolutions. Cette technique permet d'évaluer la fonction d'échelle  $K(q, \eta)$  du champ à la puissance  $\eta$  normalisé :

$$\varepsilon_\lambda^{(\eta)} = \frac{\varepsilon_\lambda^\eta}{\langle \varepsilon_\lambda^\eta \rangle}$$

On a ainsi :

$$K(q, \eta) = K(\eta q) - qK(\eta)$$

Pour des multifractales universelles, on a :

$$K(q, \eta) = \eta^\alpha K(q)$$

Il suffit ainsi, pour déterminer  $\alpha$ , d'effectuer une regression linéaire de  $\log(K(q, \nu))$  en fonction de  $\log \nu$ .

Cette technique est facilement exportable vers des outils informatiques, la seule difficulté technique résidant dans la détermination automatique d'un coefficient de linéarité.

Une analyse de l'écoulement turbulent de type Mc Williams (cf. 2.4) grâce à ces outils nous a permis de déterminer une valeur de  $\alpha$  proche de 1.97 (cf. figure 7).

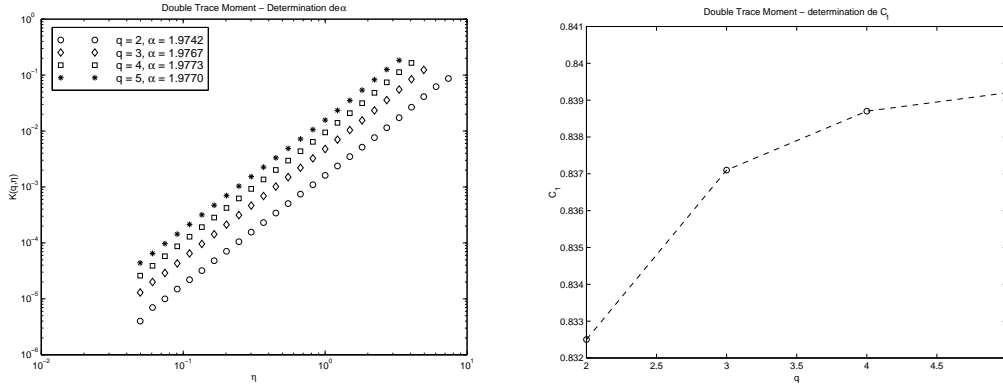


FIG. 7 – *Double trace moment - détermination de  $\alpha$  et de  $C_1(x10^3)$  pour  $q = 2, 3, 4, 5$ . Nous pouvons remarquer sur cette figure que, contrairement au cas tridimensionnel, les courbes de détermination de  $\alpha$  n'admettent pas de point d'inflexion pour une valeur proche de  $\eta = 1$ .  $C_1$  augmente en fonction de  $q$  d'une façon qui semble régulière. Sa valeur varie de  $8.32x10^{-4}$  à  $8.4x10^{-4}$*

Le  $C_1$  caractéristique de ce flux est quant à lui de l'ordre de  $8.4x10^{-4}$  (cf. figure 7). Le fait d'obtenir un  $C_1$  très faible pose quelques problèmes : cela dénoterait une répartition quasi-homogène du flux dans l'ensemble de l'écoulement. On peut néanmoins noter deux phénomènes qui permettraient d'appréhender ce problème :

- Du fait que les temps caractéristiques de l'écoulement varient en  $(\ln \frac{k}{k_i})^{-\frac{1}{\epsilon}}$ , la dissipation de l'enstrophie se fait de manière très localisée (peut-être sur un ou deux nombres d'onde). C'est pour cette raison qu'il est difficile de déterminer précisément le  $C_1$  d'universalité forte.

- La dissipation est hypervisqueuse. Elle affecte ainsi le comportement dissipateur des petites échelles, comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent (2.4). Il se pourrait donc bien que ce flux ait tendance à être faussé pour des petites valeurs de  $k$ .

### 3.2.2 Utilisation des fonctions de structure

On définit les fonctions de structure des processus multifractals par :

$$S_q(\Delta x) = \langle \|\omega(x + \Delta x) - \omega(x)\|^q \rangle$$

Le comportement de ces fonctions est :  $S_q(\Delta x) \sim (\Delta x)^{\xi(q)}$   
 où  $\xi(q) = qH - K(aq) = q\xi(1) - a^\alpha K(q)$ .  $a$  et  $H$  représentent les coefficients d'intégration fractionnaire du flux (voir Schertzer *et al.* - 1997) ; on a  $\omega \sim \beta^\alpha l^H$

La courbe  $\xi(q)$  en fonction de  $q$  relative à l'écoulement étudié est représentée sur la figure 8.

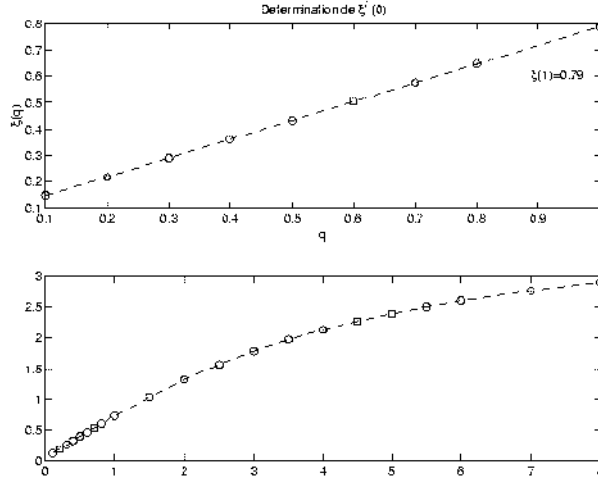


FIG. 8 – Fonctions de structure - détermination de  $\xi(q)$

Afin de mieux discriminer les modèles, il faut utiliser des techniques d'analyse directement en rapport avec la non-linéarité de la courbe  $\xi(q)$ . La méthode des fonctions de structure consiste à analyser la fonction  $f(q) = q\xi'(0) - \xi(q)$ . Les relations suivantes sont alors utilisées :

$$\xi'(0) = \xi(1) + a^\alpha \frac{C_1}{\alpha - 1}$$

$$f(q) = q\xi'(0) - \xi(q) = a^\alpha \frac{C_1}{\alpha - 1} q^\alpha$$

$f(q)$  en fonction de  $q$  a été calculée pour notre écoulement et est représentée sur la figure 9. Les valeurs alors obtenues sont :

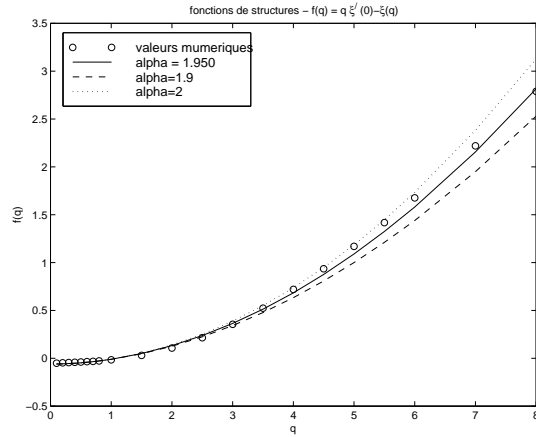


FIG. 9 – Fonctions de structure - détermination de  $f(q)$

$$1.95 < \alpha < 2, \xi = 0.79 \text{ et } C_1^\xi = a^\alpha C_1 = 5.10^{-2}$$

En effectuant une analyse dimensionnelle, on obtient (cf. 4.1)  $a = \frac{1}{3}$ . Ceci nous permet de déterminer que  $C_1 \sim 0.45$ .

### 3.3 Résultats

Il est indéniable que la cascade d'enstrophie en turbulence bidimensionnelle admet un comportement multifractal d'universalité forte. Les résultats de ces analyses nous laissent très nettement penser que le générateur de cette cascade a un comportement log-normal, ou proche ( $1.9 < \alpha < 2$ ).

Ces deux résultats contradictoires pour la détermination du flux montrent que les deux hypothèses que nous avons séparément utilisées dans le cadre de chacune des analyses précédentes ne sont pas toutes les deux vérifiées pour l'intermittence turbulente bidimensionnelle.

La difficulté majeure rencontrée dans cette étude correspond au fait que les simulations numériques directes, du fait de leur coût en temps de calcul, ne permettent pas d'atteindre un régime asymptotique correspondant à la phénoménologie de Batchelor et Kraichnan. Cela a été largement reconnu ces quinze dernières années : la pente du spectre d'énergie est toujours plus forte (pente de 4,5 dans nos données numériques) que celle prévue par cette phénoménologie (pente de 3 pour Batchelor, avec une correction logarithmique pour Kraichnan). Cela s'explique par le fait que ce régime asymptotique, contrairement à celui de K41, requiert en effet un temps proportionnel au logarithme du nombre d'onde de dissipation.

### 3.4 Perspectives pour dépasser les limites de l'étude actuelle

Pour parer la longueur des temps d'établissement des spectres, il faut recourir à des simulations plus simples que Navier-Stokes, mais conservant des propriétés essentielles de ces équations. Ce constat a motivé un regain d'intérêt pour les modèles en "coquille sphériques" ("shell-models") tels le modèle GOY (Gledzer et al., 1981) dont l'extrême simplicité permet des simulations à très grand nombres de Reynolds. Malheureusement, ces modèles n'ont plus de dimension spatiale, mais seulement une dimension de temps et des échelles spatiales, alors que l'intermittence est fondamentalement un phénomène à la fois en espace et en temps.

Le modèle de cascade de gyroscopes (SGC 'Scaling Gyroscopes Cascade model'; Chigirinskaya et Schertzer 1996), qui a une dimension espace, a été développé en réponse à ces questions et permet effectivement de longues simulations pour des Reynolds de  $10^8$  sur des stations de travail. Pour la turbulence tridimensionnelle, SGC est obtenu en préservant un certain type d'interactions non locales de Navier-Stokes : celles qui correspondent à ce que le terme non linéaire se réduise au vecteur de Lamb (produit vectoriel de la vitesse et de la vorticité) et de facto à une similitude entre ces équations et celles d'Euler pour le gyroscope. Une telle similitude entre un fluide parfait et un gyroscope avait été envisagée par Lamb (1963) et Arnold (1966), celle entre une hiérarchie de gyroscopes et la turbulence développée par Obukhov (1971). Un avantage notable par rapport à l'équation de Burgers (réduction "classique" 1D de Navier-Stokes) est que l'incompressibilité du champ de vitesse est conservée même dans la version la plus simple (c.a.d. scalaire) de SGC. Plus fondamentalement, ce modèle préserve la structure de Lie de Navier-Stokes, en particulier deux invariants liées à cette structure : l'énergie et l'hélicité du fluide étant respectivement analogues au carré du moment du gyroscope et à l'énergie du gyroscope.

Pour la turbulence 2D (Chigirinskaya et al. 1997), SGC requiert un développement du deuxième ordre par rapport au cas 3D, le premier ordre s'annulant. Ce modèle à l'avantage de développer à la fois une cascade directe d'énstrophie et une cascade inverse d'énergie, du fait que l'énergie et l'énstrophie du fluide sont alors respectivement analogues à l'énergie et au carré du moment. Il est important de noter que la cascade inverse reste hors de portée des modèles en coquille sphériques. Le comportement intermittent de cette cascade inverse d'énergie est tout à fait similaire à la cascade (directe) en turbulence 3D, qui elle-même a des caractéristiques multifractales correspondant aux analyses empiriques. Par contre, le modèle coquille sphérique, auquel le SGC peut être réduit, a un comportement multifractal très distinct.

Nous comptons donc développer sur le modèle SGC 2D, les mêmes analyses que nous avons effectuées sur les simulations numériques directes. Cela devrait nous permettre d'éclaircir les questions restées en suspens du fait que nous n'atteignons pas un régime asymptotique dans ce cas.

## Conclusion

La recherche d'explication des écarts aux spectres d'énergie et d'enstrophie obtenus par les observations expérimentales ou les simulations numériques se divise en deux voies disjointes. L'une s'oriente vers une modélisation de l'intermittence qui se focalise sur la turbulence tridimensionnelle, tandis que l'autre se consacre à la caractérisation des structures cohérentes qu'il est plus facile de modéliser en dimension 2. Nous avons tenté dans cette étude d'établir un lien entre ces deux voies de recherche à travers une étude de l'intermittence bidimensionnelle.

Les conclusions de cette étude permettent de confirmer le comportement multifractal de la cascade d'enstrophie en turbulence bidimensionnelle. Le générateur de celle-ci est gaussien (ou du moins  $\alpha \sim 2$ ), ce qui est inhabituel car en turbulence tridimensionnelle, la cascade d'énergie est générée par une loi Lévy stable dont le paramètre  $\alpha$  est à peu près égal à 1,5.

La principale difficulté rencontrée au cours de cette étude concernait la détermination du flux conservatif dans cette zone de la cascade. L'estimation de  $C_1$  à l'aide de Double Trace Moment semble fautive, car la valeur trouvée est trop faible. Les fonctions de structure nous ont permis de déterminer une valeur de  $C_1$  bien plus raisonnable. Cette divergence des résultats est essentiellement liée au fait que le régime asymptotique de la turbulence bidimensionnelle ne peut être atteint qu'au bout d'un temps infini. Une exploration grâce au modèle des cascades de gyroscopes permettra sans aucun doute de répondre à certaines de nos questions.

## Références

- G.K. Batchelor, A.A. Townsend, Proc. Roy. Soc. **A199**, 238 (1949).
- Basdevant, Sadourny, J. Mech Th. et Appl. (1983).
- A. Favre, L.S.G. Kovasznay, R. Dumas, J. Gaviglio, M. Coantic, *La turbulence en mécanique des fluides - Bases théoriques et expérimentales, méthodes statistiques*, Gauthier - Villars (1976).
- U. Frisch, *Turbulence*, Cambridge University Press (1995).
- U. Frisch, P.L. Sulem, M. Nelkin, J. Fluid Mech. **87**, 719 (1978).
- A.N. Kolmogorov, Dokl. Acad. Sci. USSR **30**, 299 (1941).
- R. H. Kraichnan, Phys Fluid. **10**, 1417 (1967).
- R. H. Kraichnan, J. Fluid Mech. **47**, 525 (1971).
- V. Herbert, *Etude analytique et numérique des structures cohérentes en turbulence bidimensionnelle incompressible*, Université Pierre et Marie Curie. 1997.
- Herrnig *et al.*, J. Fluid Mech. **66**, 417 (1974)
- M. Larchevêque, *Turbulence incompressible - DEA de Mécanique*. Université Pierre et Marie Curie (1998).
- D. Lavallée, Ph.D. Thesis, Mc Gill University, Montreal, Canada (1991).
- A.M. Obukhov, Dokl. Akad. Nauk. SSSR **32**, 22 (1941).
- G. Parisi, U. Frisch, *Turbulence and Predictability in Geophysical Fluid Dynamics and Climate Dynamics*, eds. M. Ghil, R. Benzi, G. Parisi (North-Holland, 1985).
- A. Pouquet *et al.*, J. Fluid Mech. **72**, 305 (1975)
- D. Schetzer, S. Lovejoy, F. Schmitt, Y. Chigirinskaya, D. Marsan *Multifractal Cascade Dynamics and Turbulent Intermittency*, Fractals **5**, 427 (1997).
- D. Schetzer, S. Lovejoy *Nonlinear Variability in Geophysics: Scaling and Multifractal processes*. In NVAG3 Lectures Notes (1993).
- D. Schetzer, S. Lovejoy *Nonlinear Variability in Geophysics: Multifractal Simulations and Analysis*. In Fractals'Physical Origin and Properties, University of Rome "La Sapienza". Plenum Press (1988).