NOVI COMMENTARII ACADEMIAE SCIENTIARVM IMPERIALIS PETROPOLITANAE

TOM. VI.

ad Annum MDCCLVI. et MDCCLVII.

PETROPOLI

TYPIS ACADEMIAE SCIENTIARVM

MDCCLXI.

N°

SVMMARIVM DISSERTATIONVM

QVAS CONTINET

NOVORVM COMMENTARIORVM

TOMVS VI.

pendo, descendere incipiet, frictione totum effectum exserente. Prior casus locum habet, quamdiu inclinatio plani certam eleuationem non superat, prorsus vti experimenta declarant. In hac autem dissertatione Auctor istam quaestionem in genere pertractat, ac de omnibus corporibus cuicunque superficiei incumbentibus, si insuper a viribus quibuscunque sollicitentur, omnes casus sollici[illegible], quibus vel solus motus progressiuus, vel mixtus, atque adeo prouolutio perfecta oriri debet; ac formulae quidem, vnde has conclusiones peti oportet, tam sunt intricatae, vt facile appareat, hanc quaestionem multo esse difficiliorem, quam primo intuitu videatur.

II.

Principia motus fluidorum.

Auctore Leon. Eulero p. 271.

Hic theoriae motus fluidorum elementa in genere traduntur, vbi totum negotium huc reducitur, vt proposita fluidi massa, siue libera, siue vasibus inclusa, cum ei motus quicunque fuerit impressus, eaque deinceps a viribus quibuscunque sollicitetur, motus, quo singulae eius particulae sint progressurae, determinetur; simulque pressio, qua singulae partes, tam in se mutuo, quam in latera vasis agunt, definiatur. Antequam autem Cel. Auctor hunc virium effectum inuestigandum suscipit, in priori istius dissertationis parte omnes

omnes motus possibiles, qui quidem in fluido locum habere possunt, diligenter expendit. Etiamsi enim singulae fluidi particulae a se inuicem sint solutae, tamen eiusmodi motus penitus excluduntur, quibus particulae in se mutuo penetrarent, quandoquidem hic de eiusmodi fluidis tantum est sermo, quae nullam compressionem in arctius spatium patiuntur. Ex quo perspicuum est, quamlibet fluidi portiunculam alium motum recipere non posse, nisi quo perpetuo idem volumen conseruet; etiamsi interea figura vtcunque varietur. Sufficeret quidem, dum ne vlla portiuncula vnquam in minus spatium compingeretur, verum quoniam, si in maius spatium expanderetur, continuitas particularum tolleretur, eaeque dispergerentur, neque amplius inter se cohaererent, huiusmodi motus non amplius ad doctrinam de motu fluidorum pertineret; sed singulae guttulae seorsim motus suos absoluerent. Hoc igitur casu excluso, motus fluidorum ista regula est restringendus, vt singulae portiunculae perpetuo eiusdem maneant voluminis; atque ex hoc principio generales motus expressiones pro singulis fluidi elementis limitantur. Considerando scilicet quamcunque fluidi portiunculam, singula eius puncta tali motu ferri debent, vt cum puncto temporis in locum proximum peruenerint, etiamnum volumen priori aequale adimpleant, vnde si cuiusuis puncti motus in ternas celeritates, secundum directiones fixas inter se normales, resoluatur, semper certa quaedam relatio inter has ternas celeritates subsistat necesse est, quam Auctor in prima parte definiuit.

In altera parte (pag. 288.) ad motum fluidi a viribus quibuscunque productum determinandum progreditur Auctor, in quo negotio vniuersa inuestigatio eo redit vt, pressio, qua partes fluidi in singulis punctis in se inuicem agunt, definiatur, quae pressio commodissime, vti in aqua fieri solet, altitudine quadam indicatur, quae ita est intelligenda, vt singula elementa fluidi parem pressionem sustineant, ac si a columna graui eiusdem fluidi, cuius altitudo illi est aequalis, premerentur. In singulis ergo fluidi punctis semper dabitur eiusmodi altitudo statum pressionis referens, quae quatenus non circumquaque est aequalis, motum elementorum perturbabit. Haec autem pressio pendet tam a viribus, quibus singula fluidi elementa immediate sollicitantur, quam ab iis, quae in totam massam agunt, ita vt in his viribus datis pressio in singulis punctis, hincque singulorum elementorum acceleratio, vel retardatio, motus assignari queat, quae determinationes omnes ab Auctore per formulas differentiales exprimuntur. At vero plerumque euolutio harum formularum maximis difficultatibus implicatur. Interim tamen vniuersa haec theoria ad Analysin puram est reducta, et quod in ea perficiendum restat, vnice ab vlteriori Analyseos promotione pendet. Tantum igitur abest, vt speculationes mere analyticae nullum vsum in Mathesi applicata praestent, vt potius adhuc insignia eius incrementa desiderentur.

III.

PRINCIPIA MOTVS FLVIDORVM.

Auctore

L. EVLERO.

PARS PRIOR.

1.

Cum corpora fluida a ſolidis hoc potiſſimum differant, quod eorum particulae a ſe inuicem omnino ſint diſſolutae, hae etiam diuerſiſſimos motus recipere poſſunt, neque motus, quo vnaquaeque fluidi particula fertur, a motu reliquarum particularum ita determinatur, vt alio motu progredi non poſſit. Longe aliter autem res ſe habet in corporibus ſolidis, quae, ſi fuerint inflexibilia, nullamque figurae ſua mutationem patiantur, vtcunque moueantur, ſingulae eorum particulae perpetuo eundem inter ſe ſitum ac diſtantiam ſervant; vnde fit, vt, cognito motu duarum triumue tantum particularum, ſtatim alius cuiuscunque particulae motus definiri queat; neque etiam duarum triumue huiusmodi corporum particularum motus ad lubitum fingi poteſt, ſed is ita comparatus eſſe debet, vt hae particulae eundem perpetuo ſitum relatiuum inter ſe obtineant.

2. Quodſi autem corpora ſolida fuerint flexibilia, ſingularum particularum motus minus determinatur: cum

cum ob flexuras tam distantia, quam situs relatiuus diversarum particularum, mutationes admittat. Interim tamen ipsa flexurae ratio legem quandam, quam diversae huiusmodi corporum particulae in motu suo sequi debent, constituit: quippe qua caueri oportet, ne partes, quae circa se inuicem tantum inflecti se patiuntur, vel a se penitus diuellantur, vel in se inuicem intrudantur; quod quidem posterius inpenetrabilitas omnibus corporibus communis exigit.

3. In corporibus autem fluidis, quorum particulae nullo nexu inter se vniuntur, motus quoque diversarum particularum multo minus restringitur: neque ex motu quotcunque particularum motus reliquarum determinatur. Si enim vel centum particularum motus, tanquam cognitus assumatur, manifestum est, motus quorum reliquae particulae capaces sint futurae, adhuc in infinitum variari posse. Ex quo concludendum videtur, motum cuiusque particulae fluidi plane non a motu reliquarum pendere, nisi forte his ita fuerit interclusa, vt eas necessario sequi cogatur.

4. Interim tamen fieri non potest, vt motus omnium fluidi particularum nullis omnino legibus adstringatur; neque adeo pro lubitu motum, qui singulis particulis inesse concipitur, fingere licet. Cum enim particulae sint impenetrabiles, statim patet, eiusmodi motum subsistere non posse, quo aliae particulae per alias transirent, sicque se mutuo penetrarent: atque, ob hanc causam, talis motus, ne cogitatione quidem in fluido inesse concipi potest. Quoniam igitur infinitos

motus

motus excludi oportet, quorum pacto reliqui ſint comparati, et quanam proprietate ab illis diſtinguantur operae pretium videtur, accuratius definire.

5. Antequam enim motus, quo fluidum quodpiam actu agitatur, aſſignari queat, neceſſarium videtur, vt omnes motus, qui quidem in hoc fluido ſubſiſtere poſſent, dignoſcantur: quos motus hic poſſibiles vocabo, vt a motibus impoſſibilibus, qui ne locum quidem habere poſſunt, diſtinguam. In hunc finem nobis conſtituendus erit character, motibus poſſibilibus conueniens, eosque ab impoſſibilibus ſegregans; quo facto ex motibus poſſibilibus quouis caſu eum determinari oportebit, qui actu ineſſe debebit. Tum ſcilicet ad vires, quibus aqua ſollicitatur, erit reſpiciendum, vt motus, qui illis ſit conformis, ex mechanicae principiis definiri poſſit.

6. In characterem igitur motuum poſſibilium, quicunque ſcilicet ſalua impenetrabilitate in fluido ineſſe poſſunt, inquirere hic conſtitui. Fluidum autem eius indolis aſſumo, vt neque in arctius ſpatium compelli ſe patiatur, neque eius continuitas interrumpi poſſit: ſtatuo nimirum in medio fluidi durante motu nullum ſpatium a fluido vacuum relinqui, ſed continuitatem in eo iugiter conſeruari. Theoria enim ad fluida huius naturae accommodata, non adeo difficile erit, eam ad fluida quoque, quorum denſitas eſt variabilis, et quae ne continuitatem quidem neceſſario requirunt, extendere.

7. Si igitur in huiusmodi fluido conſideretur portio quaecunque, motus, quo ſingulae eius particulae

feruntur, ita debet esse comparatus, vt omni tempore aequale spatium adimpleant. Hoc enim si in singulis portionibus eueniat, omnis vel expansio in maius spatium, vel coarctatio in minus spatium praepedietur; atque huiusmodi motus, si ad hanc solam indolem respiciamus, qua fluidum neque expansionis, neque condensationis, capax statuitur, omnino pro possibili erit habendus. Quod autem hic de qualibet fluidi portione dictum est, de singulis eius elementis est intelligendum; ita vt cuiusque elementi volumen perpetuo eiusdem quantitatis manere debeat.

8. Quo ergo huic conditioni satisfiat, in singulis fluidi punctis motus quicunque inesse concipiatur; tum sumto quocunque fluidi elemento inuestigetur translatio momentanea singulorum eius terminorum, sicque innotescet spatiolum, in quo hoc elementum elapso tempusculo minimo continebitur. Deinde hoc spatiolum illi, quod ante occupauerat, aequale statuatur, haecque aequatio rationem motus, quatenus erit possibilis, indicabit. Quodsi enim singula elementa singulis tempusculis aequalia spatiola occupent, neque vlla fluidi compressio, neque expansio, orietur; motusque ita erit comparatus, vt pro possibili sit habendus.

9. Cum autem hic non solum celeritas motus, qui singulis fluidi punctis inesse concipitur, spectari debeat, sed etiam eius directio, haec vtraque consideratio commodissime instituetur, si motus cuiusque puncti secundum directiones fixas resoluatur. Haec autem resolutio vel secundum binas, vel ternas directiones fieri

fieri solet: priori enim resolutione vti licet, si singulorum punctorum motus in eodem plano absoluatur; sin autem eorum motus non in eodem plano contineatur, tum motum secundum ternos axes fixos resolui oportet. Quoniam igitur hic posterior casus plus difficultatis habet quam prior, inuestigationem motuum possibilium a casu priori incipi conueniet, qua expedita casus posterior facilius expedietur.

10. Primum igitur fluido duas tantum dimensiones tribuam, ita vt singulae eius particulae non solum nunc quidem in eodem plano reperiantur, sed etiam earum motus in eodem plano absoluatur. Hoc itaque planum plano tabulae repraesentetur, et consideretur, fluidi quodcunque punctum l, cuius situs per coordinatas orthogonales $AL = x$ et $Ll = y$ referatur, tum vero eius motus, quo nunc quidem fertur, secundum easdem directiones resolutus praebeat celeritatem secundum axem AL, vel secundum $lm = u$, et secundum alterum axem AB, vel secundum $ln = v$: ita vt vera huius puncti celeritas futura sit $= \sqrt{(uu + vv)}$, eiusque directio ad axem AL inclinata sit angulo, cuius tangens $= \frac{v}{u}$. Tab. IV. Fig. 1.

11. Cum statum motus praesentem tantum, qui singulis fluidi punctis conueniat, euoluere sit propositum, celeritates u et v a situ puncti l vnice pendebunt, eruntque idcirco tanquam functiones coordinatarum x et y spectandae. Ponamus igitur esse differentiatione instituta:

$$du = L\,dx + l\,dy \quad \text{et} \quad dv = M\,dx + m\,dy$$

 quae

quae formulae differentiales, cum sint completae, constat fore $\frac{dL}{dy}=\frac{dl}{dx}$ et $\frac{dM}{dy}=\frac{dm}{dx}$: vbi notandum est, in huiusmodi expressione $\frac{dL}{dy}$; differentiale ipsius L, seu dL, tantum ex variabilitate ipsius y capiendum esse, similique modo in expressione $\frac{dl}{dx}$, pro dl id differentiale ipsius l sumi debet, quod oritur si tantum x pro variabili habeatur.

12. Probe ergo cauendum est, ne in huiusmodi expressionibus fractis $\frac{dL}{dy}$, $\frac{dl}{dx}$, $\frac{dM}{dy}$, et $\frac{dm}{dx}$, numeratores dL, dl, dM et dm differentialia completa functionum L, l, M et m designare putentur; sed perpetuo ea tantum earum differentialia denotant, quae ex variabilitate vnicae coordinatae, eius scilicet, cuius differentiale in denominatore exhibetur, oriuntur; sicque huiusmodi expressiones semper quantitates finitas ac determinatas repraesentabunt. Simili autem modo intelligitur, fore $L=\frac{du}{dx}$, $l=\frac{du}{dy}$; $M=\frac{dv}{dx}$ et $m=\frac{dv}{dy}$; qua notandi ratione primum Clar. *Fontaine* vsus est, et quia non contemnendum calculi compendium largitur, eam hic quoque adhibebo.

13. Cum igitur sit $du=Ldx+ldy$ et $dv=Mdx+mdy$, hinc geminas celeritates cuiusque alius puncti, quod quidem infinite parum a puncto l distat, assignare licebit; si enim talis puncti a puncto l distantia secundum axem AL sit $=dx$, et secundum axem AB$=dy$, tum huius puncti celeritas secundum axem AL erit $=u+Ldx+ldy$; celeritas autem secundum alterum axem AB$=v+Mdx+mdy$. Tempusculo ergo infinite paruo dt hoc punctum proferetur secundum

dum directionem axis A L per spatiolum $= dt(u + L\,dx + l\,dy)$ et secundum directionem alterius axis A B per spatiolum $= dt(v + M\,dx + m\,dy)$.

14. His notatis consideremus elementum aquae triangulare lmn, et quaeramus situm, in quem id ob motum, quem ipsi insitum concipimus, tempusculo dt transferatur. Sit autem huius elementi triangularis lmn latus lm axi A L, latus vero ln axi A B, parallelum: ac ponatur $lm = dx$, et $ln = dy$; seu sint pro puncto m coordinatae $x + dx$ et y; pro puncto n autem sint coordinatae x et $y + dy$. Patet autem, quoniam relationem inter differentialia dx et dy non definimus, eaque tam negatiue, quam affirmatiue, accipi possint, totam fluidi massam in huiusmodi elementa cogitatione diuidi posse, ita vt, quod de vno in genere definiemus, id aeque ad omnia pateat.

15. Vt igitur pateat, quotum elementum hoc lmn, ob motum insitum, tempusculo dt transferatur, quaeramus puncta p, q et r, in quae eius anguli, seu puncta l, m et n, tempusculo dt transferentur. Cum igitur sit

	puncti l	puncti m	puncti n
Celeritas secundum A L $=$	u	$u + L\,dx$	$u + l\,dy$
Celeritas secundum A B $=$	v	$v + M\,dx$	$v + m\,dy$

punctum l perueniet tempusculo dt in p, vt sit:

$$AP - AL = u\,dt, \text{ et } Pp - Ll = v\,dt.$$

Punctum autem m perueniet in q, vt sit:

$$AQ - AM = (u + L\,dx)\,dt \text{ et } Qq - Mm = (v + M\,dx)\,dt.$$

 At

At punctum n feretur in r, vt fit:

$$AR - AL = (u + l\,dy)\,dt \text{ et } Rr - Ln = (v + m\,dy)\,dt.$$

16. Cum igitur puncta l, m et n tempusculo dt in puncta p, q et r transferantur, iunctis lineolis rectis pq, pr et qr triangulum lmn, in situm, quem triangulum pqr refert, peruenire censendum est. Quoniam enim triangulum lmn statuitur infinite paruum, eius latera per motum curuaturam recipere nequeunt, ideoque elementum aquae lmn post translationem tempusculo dt factam, etiamnum figuram triangularem pqr, et quidem rectilineam, retinebit Cum igitur hoc elementum lmn per motum, neque in maius spatium extendi, neque in minus compingi, debeat, motum ita comparatum esse oportet, vt area trianguli pqr aequalis areae trianguli lmn reddatur.

17. Trianguli autem lmn, cum sit ad l rectangulum, area est $= \frac{1}{2}dx\,dy$, cui propterea area trianguli pqr aequalis est statuenda. Ad hanc autem aream inueniendam considerandae sunt punctorum p, q, r binae coordinatae, quae sunt:

$$AP = x + u\,dt;\; AQ = x + dx + (u + L\,dx)\,dt;\; AR = x + (u + l\,dy)\,dt$$

$$Pp = y + v\,dt;\; Qq = y + (v + M\,dx)\,dt,\; Rr = y + dy + (v + m\,dy)\,dt$$

Tum vero area trianguli pqr ex areis sequentium trapeziorum ita reperitur, vt sit:

$$pqr = PprR + RrqQ - PpqQ.$$

Cum autem haec trapezia bina latera parallela basique AQ perpendicularia habeant, eorum areae facile assignantur.

18. Erit

18. Erit enim vti ex elementis conſtat:

$$PprR = \tfrac{1}{2}PR(Pp + Rr)$$
$$RrqQ = \tfrac{1}{2}RQ(Rr + Qq)$$
$$PpqQ = \tfrac{1}{2}PQ(Pp + Qq)$$

His igitur colligendis reperietur:

$$\Delta pqr = \tfrac{1}{2}PQ.Rr - \tfrac{1}{2}RQ.Pp - \tfrac{1}{2}PR.Qq$$

Ponatur breuitatis gratia

$$AQ = AP + Q;\ AR = AP + R;\ Qq = Pp + q \text{ et } Rr = Pp + r$$

vt ſit $PQ = Q$; $PR = R$ et $RQ = Q - R$,

eritque $\Delta pqr = \tfrac{1}{2}Q(Pp + r) - \tfrac{1}{2}(Q - R)Pp - \tfrac{1}{2}R(Pp + q)$

ſiue $\Delta pqr = \tfrac{1}{2}Q.r - \tfrac{1}{2}R.q$.

19. Eſt vero ex valoribus coordinatarum ante exhibitis

$$Q = dx + L\,dx\,dt: \quad q = M\,dx\,dt$$
$$R = \quad l\,dy\,dt; \quad r = dy + m\,dy\,dt;$$

quibus valoribus ſubſtitutis, orietur area trianguli

$$pqr = \tfrac{1}{2}dx\,dy(1 + L\,dt)(1 + m\,dt) - \tfrac{1}{2}M\,l\,dx\,dy\,dt^2, \text{ ſiue}$$
$$pqr = \tfrac{1}{2}dx\,dy(1 + L\,dt + m\,dt + L\,m\,dt^2 - M\,l\,dt^2)$$

quae cum aequalis eſſe debeat areae trianguli lmn, quae eſt $= \tfrac{1}{2}dx\,dy$, haec naſcetur aequatio:

$$L\,dt + m\,dt + Lm\,dt^2 - M\,l\,dt^2 = 0 \text{ ſiue}$$
$$L + m + L\,m\,dt - M\,l\,dt = 0.$$

20. Cum igitur termini $L\,m\,dt$ et $M\,l\,dt$ prae finitis L et m euaneſcant, habebitur haec aequatio $L + m = 0$. Quam ob rem, vt motus ſit poſſibilis, celeritates u et v puncti cuiuscunque l, ita debent eſſe comparatae, vt poſitis earum differentialibus

$$du = L\,dx + l\,dy, \text{ et } dv = M\,dx + m\,dy$$

ſit

fit $L + m = 0$. Seu cum fit $L = \frac{du}{dx}$ et $m = \frac{dv}{dy}$, celeritates u et v, quae puncto l fecundum directiones axium AL et AB ineffe concipiuntur, eiusmodi functiones coordinatarum x et y effe debent, vt fit $\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} = 0$, ficque motuum poffibilium criterium in hoc confiftit, vt fit $\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} = 0$; nifi enim haec conditio locum habeat, motus fluidi fubfiftere nequit.

21. Eodem modo erit procedendum, fi motus fluidi non abfoluatur in eodem plano. Ponamus igitur, vt quaeftionem latiffimo fenfu acceptam expediamus, fingulas fluidi particulas motu quocunque inter fe agitari, hac folum lege obferuata, vt neque condenfatio, neque expanfio partium vsquam eueniat: quaeritur igitur fimili modo, quaenam hinc determinatio ad celeritates, quas fingulis punctis ineffe concipimus, accedat, vt motus poffibilis reddatur: feu quod eodem redit, omnes motus, qui hisce conditionibus aduerfantur, a poffibilibus remouere oportet, quo ipfo criterium motuum poffibilium conftituetur.

22. Confideremus igitur punctum fluidi quodcunque λ; ad cuius fitum repraefentandum vtamur tribus axibus fixis AL, AB et AC inter fe normalibus.
Tab. IV. Fig. 2. Sint igitur ternae puncti λ coordinatae his axibus parallelae, $AL = x$, $Ll = y$ et $l\lambda = z$; quae obtinentur, fi primum a puncto λ ad planum duobus axibus AL et AB determinatum demittatur perpendiculum λl; tum vero ex puncto l ad axem AL perpendicularis lL agatur. Hoc itaque modo fitus puncti λ per ternas iftas coordinatas generaliffime exprimitur, atque ad omnia fluidi puncta accommodari poteft.

23. Quicunque porro ſit motus puncti λ, is ſecundum ternas directiones $\lambda\mu$, $\lambda\nu$ et λo axibus AL AB et AC parallelas reſolui poterit Sit igitur puncti λ

celeritas ſecundum directionem $\lambda\mu = u$

celeritas ſecundum directionem $\lambda\nu = v$

celeritas ſecundum directionem $\lambda o = w$

et cum hae celeritates pro vario puncti λ ſitu vtcunque variare poſſint, erunt eae tanquam functiones ternarum coordinatarum x, y et z conſiderandae. Iis igitur differentiatis, ponamus prodire:

$$du = \mathrm{L}dx + l\,dy + \lambda\,dz$$
$$dv = \mathrm{M}dx + m\,dy + \mu\,dz$$
$$dw = \mathrm{N}dx + n\,dy + \nu\,dz$$

eruntque porro quantitates L, l, λ, M, m, μ, N, n, ν, functiones coordinatarum x, y et z.

24. Quoniam hae formulae differentiales ſunt completae, ſequitur, ſimili modo, vt ſupra, fore:

$$\frac{d\mathrm{L}}{dy} = \frac{dl}{dx};\quad \frac{d\mathrm{L}}{dz} = \frac{d\lambda}{dx};\quad \frac{dl}{dz} = \frac{d\lambda}{dy}$$
$$\frac{d\mathrm{M}}{dy} = \frac{dm}{dx};\quad \frac{d\mathrm{M}}{dz} = \frac{d\mu}{dx};\quad \frac{dm}{dz} = \frac{d\mu}{dy}$$
$$\frac{d\mathrm{N}}{dy} = \frac{dn}{dx};\quad \frac{d\mathrm{N}}{dz} = \frac{d\nu}{dx};\quad \frac{dn}{dz} = \frac{d\nu}{dy}$$

ſiquidem in numeratoribus ea tantum coordinatarum, cuius differentiale in denominatore exhibetur, pro variabili aſſumatur.

25. Triplici ergo motu hoc, quem in puncto X ineſſe concipimus, hoc punctum λ tempuſculo dt ita mouebitur, vt

ſecundum directionem axis AL per ſpatiolum $= u\,dt$

ſecundum directionem axis AB per ſpatiolum $= v\,dt$

ſecundum directionem axis AC per ſpatiolum $= w\,dt$

promoueatur. Sin autem puncti λ vera celeritas, quae scilicet ex compositione huius triplicis motus oritur, dicatur $= V$, erit ob normalitatem trium directionum $V = \sqrt{(uu + vv + ww)}$, et spatiolum, quod tempusculo dt motu suo vero conficit, erit $= V\,dt$.

26. Consideremus iam fluidi elementum quodpiam solidum, vt videamus, quorsum id tempusculo dt proferatur; et quoniam perinde est, cuiusmodi figuram isti elemento tribuamus, dummodo ita generatim definiatur, tota fluidi massa, in eiusmodi elementa diuisa concipi queat; sit, vt calculo consulatur, eius figura pyramis triangularis rectangula, terminata quatuor angulis solidis λ, μ, ν et o, ita vt pro singulis sint ternae coordinatae:

	puncti λ	puncti μ	puncti ν	puncti o
secundum AL	x	$x + dx$	x	x
secundum AB	y	y	$y + dy$	y.
secundum AC	z	z	z	$z + dz$

et cum basis huius pyramidis sit $\lambda\mu\nu = lmn = \frac{1}{2}dx\,dy$, altitudo vero $\lambda o = dz$, erit eius solliditas $= \frac{1}{6}dx\,dy\,dz$.

27. Inuestigemus iam, quorsum singuli isti pyramidis anguli λ, μ, ν et o tempusculo dt transferantur: ad quod eorum ternas celeritates secundum directiones ternorum axium contemplari oportet, quae ex celeritatum u, v, w valoribus differentialibus erunt:

Celeritas secundum	puncti λ	puncti μ	puncti ν	puncti o
directionem AL	u	$u + L\,dx$	$u + l\,dy$	$u + \lambda\,dz$
directionem AB	v	$v + M\,dx$	$v + m\,dy$	$v + \mu\,dz$
directionem AC	w	$w + N\,dx$	$w + n\,dy$	$w + \nu\,dz$

28. Quodsi ergo puncta λ, μ, ν et o tempusculo dt in puncta π, Φ, ϱ et σ transferri ponamus,

horum-

horumque punctorum ternas coordinatas axibus parallelas constituamus, erunt translationes momentaneae secundum hos axes:

$AP-AL=u\,dt$	$Pp-Ll=v\,dt$	$p\pi-l\lambda=w\,dt$
$AQ-AM=(u+L\,dx)dt$	$Qq-Mm=(v+M\,dx)dt$	$q\Phi\ m\mu=(w+N\,dx)dt$
$AR-AL=(u+l\,dy)\,dt$	$Rr-Ln=(v+m\,dy)dt$	$r\varrho-n\nu=(w+n\,dy)dt$
$AS-AL=(u+\lambda dz)dt$	$Ss-Ll=(v+\mu\,dz)dt$	$s\sigma-lo=(w+\nu\,dz)dt$

Hinc ergo ternae coordinatae pro his quatuor punctis π, Φ, ϱ et σ erunt:

$AP=x+u\,dt$;	$Pp=y+v\,dt$;	$p\pi=z+w\,dt$
$RQ=x+dx+(u+L\,dx)dt$;	$Qq=y+(v+M\,dx)dt$;	$q\Phi=z+(w+N\,dx)dt$
$AR=x+(u+l\,dy)dt$;	$Rr=y+dy+(v+m\,dy)dt$;	$r\varrho=z+(w+n\,dy)\,dt$
$AS=x+(u+\lambda dz)dt$;	$Ss=y+(v+\mu\,dz)dt$;	$s\sigma=z+dz+(w+\nu\,dz)dt$

29. Cum igitur elapso tempusculo dt anguli pyramidis λ, μ, ν et o in puncta π, Φ, ϱ et σ sint translati, ipsa pyramis nunc pyramidem pariter triangularem $\pi\Phi\varrho\sigma$ constituet; ideoque ob indolem fluidi efficiendum est, vt soliditas pyramidis $\pi\Phi\varrho\sigma$ aequalis sit soliditati pyramidis propositae $\lambda\mu\nu o$, seu $=\frac{1}{6}\,dxdydz$. Totum ergo negotium huc redit, vt soliditas pyramidis $\pi\Phi\varrho\sigma$ determinetur. Perspicuum autem est, hanc pyramidem relinqui, si a solido $prq\pi\Phi\varrho\sigma$ auferatur solidum $pqr\pi\Phi\varrho$; quod posterius solidum est prisma basi triangulari pqr normaliter insistens, et superne sectione obliqua $\pi\varrho\Phi$ truncatum.

30. In huiusmodi autem prismata truncata tria quoque alterum solidum $pqr\pi\Phi\varrho\sigma$ resolui potest, quae sunt:

I. $pqs\pi\Phi\sigma$; II. $prs\pi\varrho\sigma$; III. $qrs\Phi\varrho\sigma$

Nn 2 sicque

ſicque effici debet, vt ſit

$$\tfrac{1}{6}dx\,dy\,dz = pqs\pi\Phi\sigma + prs\pi\varrho\sigma + qrs\Phi\varrho\sigma - pqr\pi\Phi\varrho.$$

Cum autem huiusmodi prisma baſi ſuae inferiori normaliter inſiſtat, tres autem altitudines habeat inaequales, eius ſoliditas reperietur, ſi baſis multiplicetur per trientem ſummae trium iſtarum altitudinum.

31. Hinc ergo ſoliditates horum prismatum truncatorum erunt:

$$pqs\pi\Phi\sigma = \tfrac{1}{3}pqs(p\pi + q\Phi + s\sigma)$$
$$prs\pi\varrho\sigma = \tfrac{1}{3}prs(p\pi + r\varrho + s\sigma)$$
$$qrs\Phi\varrho\sigma = \tfrac{1}{3}qrs(q\Phi + r\varrho + s\sigma)$$
$$pqr\pi\Phi\varrho = \tfrac{1}{3}pqr(p\pi + q\Phi + r\varrho).$$

Cum autem ſit $pqr = pqs + prs + qrs$, erit ſumma trium priorum prismatum poſtremo minuta, ſiue

$$\tfrac{1}{6}dx\,dy\,dz = -\tfrac{1}{3}p\pi.qrs - \tfrac{1}{3}q\Phi.prs - -\tfrac{1}{3}r\varrho.pqs + \tfrac{1}{3}s\sigma.pqr;$$

ſiue

$$dx\,dy\,dz = 2pqr.s\sigma - 2pqs.r\varrho - 2prs.q\Phi - 2qrs.p\pi.$$

32. Supereſt igitur, vt horum prismatum baſes definiantur: verum antequam hoc faciamus, ponamus ad ſequentem calculum contrahendum:

$$AQ = AP + Q;\ Qq = Pp + q;\ q\Phi = p\pi + \Phi$$
$$AR = AP + R;\ Rr = Pp + r;\ r\varrho = p\pi + \varrho$$
$$AS = AP + S;\ Ss = Pp + s;\ s\sigma = p\pi + \sigma$$

atque his poſtremis valoribus ſubſtitutis, termini $p\pi$ continentes ſe mutuo deſtruent, eritque

$$dx\,dy\,dz = 2pqr.\sigma - 2pqs.\varrho - 2prs.\Phi$$

ſicque

ſicque numerus baſium inueſtigandarum, vnitate eſt imminutus.

33. Iam triangulum pqr reperitur, ſi a figura $PprqQ$, ſeu a ſumma trapeziorum $PprR + RrqQ$ auferatur trapezium $PpqQ$; vnde erit

$$\Delta pqr = \tfrac{1}{2}PR(Pp + Rr) + \tfrac{1}{2}RQ(Rr + Qq) - \tfrac{1}{2}PQ(Pp + Qq);$$

ſiue ob $PR = R$; $RQ = Q - R$; et $PQ = Q$ erit.

$$\Delta pqr = \tfrac{1}{2}R(Pp - Qq) + \tfrac{1}{2}Q(Rr - Pp) = \tfrac{1}{2}Qr - \tfrac{1}{2}Rq.$$

Simili modo erit:

$$\Delta pqs = \tfrac{1}{2}PS(Pp + Ss) + \tfrac{1}{2}SQ(Ss + Qq) - \tfrac{1}{2}PQ(Pp + Qq), \text{ ſeu}$$

$$\Delta pqs = \tfrac{1}{2}S(Pp + Ss) + \tfrac{1}{2}(Q - S)(Ss + Qq) - \tfrac{1}{2}Q(Pp + Qq)$$

vnde fit:

$$\Delta pqs = \tfrac{1}{2}S(Pp - Qq) + \tfrac{1}{2}Q(Ss - Pp) = \tfrac{1}{2}Qs - \tfrac{1}{2}Sq.$$

Ac denique

$$\Delta prs = \tfrac{1}{2}PR(Pp + Rr) + \tfrac{1}{2}RS(Rr + Ss) - \tfrac{1}{2}PS(Pp + Ss) \text{ ſeu}$$

$$\Delta prs = \tfrac{1}{2}R(Pp + Rr) + \tfrac{1}{2}(S - R)(Rr + Ss) - \tfrac{1}{2}S(Pp + Ss)$$

vnde fit:

$$\Delta prs = \tfrac{1}{2}R(Pp - Ss) + \tfrac{1}{2}S(Rr - Pp) = \tfrac{1}{2}Sr - \tfrac{1}{2}Rs.$$

34. His igitur valoribus ſubſtitutis, obtinebimus

$$dx\,dy\,dz = (Qr - Rq)\sigma + (Sq - Qs)\varrho + (Rs - Sr)\Phi$$

ſiue pyramidis $\pi\Phi\varrho\sigma$ ſoliditas erit

$$\tfrac{1}{6}(Qr - Rq)\sigma + \tfrac{1}{6}(Sq - Qs)\varrho + \tfrac{1}{6}(Rs - Sr)\Phi$$

Eſt autem ex coordinatarum valoribus ſupra §. 28 exhibitis

$$\begin{array}{lll} Q = dx + L\,dx\,dt & q = M\,dx\,dt & \Phi = N\,dx\,dt \\ R = l\,dy\,dt & r = dy + m\,dy\,dt & \varrho = n\,dy\,dt \\ S = \lambda\,dz\,dt & s = \mu\,dz\,dt & \sigma = dz + \nu\,dz\,dt. \end{array}$$

 35.

35. Cum igitur hinc fiat

$$Qr - Rq = dxdy(1 + Ldt + mdt + Lmdt^2 - Mldt^2)$$
$$Sq - Qs = dxdz(-\mu dt - L\mu dt^2 + M\lambda dt^2)$$
$$Rs - Sr = dydz(-\lambda dt - m\lambda dt^2 + l\mu dt^2)$$

reperietur soliditas pyramidis $\pi\phi\varrho\sigma$ ita expressa

$$\tfrac{1}{6}dxdydz\left\{1 \begin{array}{lll} +Ldt & +Lmdt^2 & +Lm\nu dt^3 \\ +mdt & -Mldt^2 & -Ml\nu dt^3 \\ +\nu dt & +L\nu dt^2 & -Ln\mu dt^3 \\ & +m\nu dt^2 & +Mn\lambda dt^3 \\ & -n\mu dt^2 & -Nm\lambda dt^3 \\ & -N\lambda dt^2 & +Nl\mu dt^3 \end{array}\right\}$$

quae cum debeat esse aequalis pyramidi $\lambda\mu\nu o = \frac{1}{6}dxdydz$ habebitur, diuisione per dt instituta, haec aequatio:

$$0 = L + m + \nu + dt(Lm + L\nu + m\nu - Ml - N\lambda - n\mu)$$
$$+ dt^2(Lm\nu + Mn\lambda + Nl\mu - Ln\mu - Ml\nu - Nl\mu)$$

36. Reiectis igitur terminis infinite paruis habebitur haec aequatio: $L + m + \nu = 0$, qua ratio celeritatum u, v, w determinatur, vt motus fluidi fiat possibilis. Cum igitur sit $L = \frac{du}{dx}$, $m = \frac{dv}{dy}$ et $\nu = \frac{dw}{dz}$: criterium motus possibilis, si puncto fluidi cuicunque λ, cuius situs ternis coordinatis x, y et z definitur, eiusmodi celeritates u, v et w secundum easdem coordinatas directae tribuantur, vt sit:

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0.$$

Hac scilicet conditione id obtinetur, vt nulla fluidi pars in motu, neque in magis, neque in minus spatium, transferatur, ac perpetuo cum fluidi continuitas, tum eadem densitas, conseruetur.

37.

37. Haec autem proprietas ita eſt interpretanda, vt pro eodem temporis momento ad omnia fluidi puncta extendatur: eodem ſcilicet momento omnium punctorum ternae celeritates u, v, w tales eſſe debent functiones ternarum coordinatarum x, y et z, vt ſit $\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0$: ſicque natura iſtarum functionum motum ſingulorum fluidi punctorum ad inſtans propoſitum definiet. Alio autem tempore eorundem punctorum motus vtcunque diuerſus eſſe poterit, dummodo pro quouis temporis puncto inuenta proprietas per totum fluidum locum habeat. Tempus ſcilicet hactenus tanquam quantitatem conſtantem ſum contemplatus.

38. Sin autem tempus quoque variabile ſpectare velimus, ita vt motus puncti λ, cuius ſitus ternis coordinatis $AL = x$, $Ll = y$ et $l\lambda = z$ indicatur, elapſo tempore t definiri debeat, manifeſtum eſt, ternas celeritates u, v et w non ſolum a coordinatis x, y et z, ſed inſuper etiam a tempore t pendere, ſeu functiones fore quatuor harum quantitatum x, y, z et t; ita vt earum differentialia huiusmodi formas ſint habitura:

$$du = L\,dx + l\,dy + \lambda\,dz + \mathfrak{L}\,dt;\; dv = M\,dx + m\,dy + \mu\,dz + \mathfrak{M}\,dt;\; dw = N\,dx + n\,dy + \nu\,dz + \mathfrak{N}\,dt.$$

Interim tamen ſemper erit $L + m + \nu = 0$, propterea, quod quouis inſtanti tempus t pro conſtanti habetur, ſeu ſit $dt = 0$. Vtcunque igitur functiones u, v, et w cum tempore t mutantur, neceſſe eſt, vt pro omni temporis momento ſit:

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0.$$

Cum enim hac conditione efficiatur, vt quaeuis fluidi portio tempuſculo dt in ſpatium ſibi aequale transferatur,

tur, idem etiam per eandem conditionem in elemento temporis ſequenti, omnibus ergo ſequentibus temporis elementis euenire debebit.

PARS ALTERA.

39. Expoſitis ergo iis, quae ad motum tantum poſſibilem attinent, inueſtigemus nunc etiam indolem eius motus, qui re vera in fluido ſubſiſtere poteſt. Hic igitur, praeter fluidi continuitatem, eiusdemque denſitatis permanentiam, ratio quoque erit habenda virium, quibus ſingula fluidi elementa actu ſollicitantur. Quando enim cuiusuis elementi motus, vel non eſt vniformis, vel non in directum porrigitur, motus immutatio viribus hoc elementum ſollicitantibus conformis eſſe debet. Quare cum ex cognitis his viribus motus mutatio innoteſcat, praecedentes autem formulae etiam hanc motus mutationem contineant, hinc nouae deducentur determinationes, quibus motus hactenus tantum poſſibilis ad motum actualem reſtringitur.

40. Inſtituamus quoque hanc inueſtigationem bipartito; ac primo concipiamus totum fluidi motum in eodem plano fieri. Sint ergo, vt ante, coordinatae ſitum puncti cuiusuis l definientes $AL = x$, $Ll = y$; ac
Tab. IV. Fig. 1.
nunc quidem elapſo tempore t ſint puncti l binae celeritates ſecundum directiones axibus AL et AB parallelas u et v: erunt u et v, quoniam nunc variabilitatis temporis ratio haberi debet, functiones ipſarum x, y et t, quo circa ponatur

$$du = L\,dx + l\,dy + \mathfrak{L}\,dt \quad \text{et} \quad dv = M\,dx + m\,dy + \mathfrak{M}\,dt$$

atque

atque ob priorem conditionem iam ſupra inuenimus, eſſe debere $L + m = 0$.

41. Cum igitur elapſo tempuſculo $= dt$ punctum l transferatur in p, abſoluto ſecundum axem AL ſpatiolo $= udt$, ſecundum alterum axem AB autem ſpatiolo $= vdt$; vt incrementa celeritatum u et v puncti l, quae tempuſculo dt ipſi inducuntur, obtineamus, pro dx et dy ſcribi oportet ſpatiola udt et vdt, vnde haec vera celeritatum incrementa prodibunt:

$du = Ludt + lvdt + \mathfrak{L}dt$ et $dv = Mudt + mvdt + \mathfrak{M}dt$

Ex quo vires acceleratrices, quae has accelerationes producere valent, erunt:

Vis accel. ſecundum $AL = 2(Lu + lv + \mathfrak{L})$

Vis accel. ſecundum $AB = 2(Mu + mv + \mathfrak{M})$

quibus ergo vires actu in aquae particulam l agentis aequales eſſe debebunt.

42. Inter vires autem, quae aquae particulas actu ſollicitant, primum conſideranda venit grauitas; cuius autem effectus, ſi planum, in quo fit motus, eſt horizontale, pro nihilo erit habendus. Sin autem fuerit decliue, axisque AL decliuitatem ſequatur, altero AB exiſtente horizontali, a grauitate orietur vis acceleratrix ſecundum AL conſtans, quae ſit $= \alpha$. Deinde non praetermittenda eſt frictio, qua ſaepe motus aquae non mediocriter impeditur; quanquam autem eius leges nondum ſunt ſatis exploratae, tamen frictionem corporum ſolidorum ſequentes non multum fortaſſe a ſcopo aberrabimus, ſi frictionem vbique preſſioni, qua aquae particulae ſe inuicem premunt, proportionalem ſtatuerimus.

43. Inprimis autem in computum eſt ducenda preſſio, qua particulae aquae vbique in ſe mutuo agunt, qua fit, vt quaelibet particula vndique ab adiacentibus comprimatur, et quatenus haec preſſio vndequaque non fuerit aequalis, eatenus particulae motus afficiatur. Vbique ſcilicet aqua in certo quodam ſtatu compreſſionis verſabitur, qui ſimilis erit ei, in quo aqua ſtagnans ad certam profunditatem exiſtit. Haec ergo profunditas, ad quam in aqua ſtagnante aqua in pari compreſſionis ſtatu reperitur, commodiſſime adhibebitur ad preſſionem in quouis fluidi puncto l exprimendam. Sit igitur p iſta altitudo, ſeu profunditas, ſtatum compreſſionis in l exprimens, eritque p functio quaedam coordinatarum x et y, ac ſi preſſio cum tempore in l quoque varietur, tempus quoque t in functionem p ingredietur.

Tab. IV. Fig. 3. 44. Ponamus ergo $dp = \mathrm{R}\,dx + r\,dy + \mathfrak{R}\,dt$, et conſideremus elementum aquae quadrangulare rectangulum $lmno$, cuius latera ſint $lm = no = dx$ et $ln = mo = dy$; areaque $= dx\,dy$. Cum iam preſſio in l ſit $= p$; preſſio in m erit $= p + \mathrm{R}\,dx$, in $n = p + r\,dy$ et in $o = p + \mathrm{R}\,dx + r\,dy$. Hinc latus lm premitur vi $= dx(p + \frac{1}{2}\mathrm{R}\,dx)$, latus vero no contra premetur vi $= dx(p + \frac{1}{2}\mathrm{R}\,dx + r\,dy)$; ab his ergo duabus viribus elementum $lmno$ ſecundum directionem ln vrgebitur vi $= -r\,dx\,dy$. Simili autem modo ex viribus $dy(p + \frac{1}{2}r\,dy)$ et $dy(p + \mathrm{R}\,dx + \frac{1}{2}r\,dy)$, quae agunt in latera ln et mo, reſultabit vis elementum vrgens ſecundum directionem $lm = -\mathrm{R}\,dx\,dy$.

45. Hinc

45. Hinc igitur orietur vis acceleratrix secundum $lm = -R$, et vis acceleratrix secundum $ln = -r$, quarum illa cum vi a grauitate orta α praebet $\alpha - R$. Frictione ergo adhuc semota, has habebimus aequationes:

$$\alpha - R = 2Lu + 2lv + 2\mathfrak{L} \text{ seu } R = \alpha - 2Lu - 2lv - 2\mathfrak{L}$$
$$-r = 2Mu + 2mv + 2\mathfrak{M} \text{ et } r = -2Mu - 2mv - 2\mathfrak{M}$$

vnde colligimus fore

$$dp = \alpha dx - 2(Lu + lv + \mathfrak{L})dx - 2(Mu + mv + \mathfrak{M})dy + \mathfrak{N}dt$$

quod differentiale oportet esse completum, seu integrabile.

46. Quia terminus αdx per se est integrabilis, et pro $\mathfrak{N}$ nihil est definitum, ex natura differentialium completorum necesse est, vt sit signandi modo iam supra adhibito:

$$\frac{d.\ Lu + lv + \mathfrak{L})}{dy} = \frac{d.\ (Mu + mv + \mathfrak{M})}{dx}$$

vnde ob $\frac{du}{dx} = L$, $\frac{du}{dy} = l$; $\frac{dv}{dx} = M$, et $\frac{dv}{dy} = m$, orietur

$$Ll + \frac{udL}{dy} + lm + \frac{vdl}{dy} + \frac{d\mathfrak{L}}{dy} = ML + \frac{udM}{dx} + mM + \frac{vdm}{dx} - \frac{d\mathfrak{M}}{dx}$$

quae reducitur ad hanc formam:

$$(L + m)(l - M) + u\left(\frac{dL}{dy} - \frac{dM}{dx}\right) + v\left(\frac{dl}{dy} - \frac{dm}{dx}\right) + \frac{d\mathfrak{L}}{dx} - \frac{d\mathfrak{M}}{dx} = 0$$

47. Verum ob differentialia $Ldx + ldy + \mathfrak{L}dt$ et $Mdx + mdy + \mathfrak{M}dt$ completa nouimus esse

$$\frac{dL}{dy} = \frac{dl}{dx}; \quad \frac{dm}{dx} = \frac{dM}{dy}; \quad \frac{d\mathfrak{L}}{dy} = \frac{dl}{dt} \text{ et } \frac{d\mathfrak{M}}{dx} = \frac{dM}{dt}$$

quibus valoribus substitutis habebimus istam aequationem:

$$(L + m)(l - M) + u\left(\frac{dl - dM}{dx}\right) + \left(\frac{dl - dM}{dy}\right) + \frac{dl - dM}{di} = 0$$

cui aperte satisfacit $l = M$: ita vt sit $\frac{du}{dy} = \frac{dv}{dx}$. Cum igitur haec conditio requirat, vt sit $\frac{du}{dy} = \frac{du}{dx}$, vicissim apparet, formulam differentialem hanc $udx + vdy$ esse debere completam in quo ergo criterium motus actualis consistit.

 48. Cri-

48. Criterium hoc independens eſt a praecedente, quod continuitas fluidi eiusque conſtans denſitas vniformis ſuppeditauit. Quare etiamſi fluidum in motu denſitatem ſuam mutaret, vti in motu fluidorum elaſticorum, veluti aëris euenire ſolet, haec proprietas nihilominus locum habere debet, vt ſit $udx + vdy$ differentiale completum. Siue celeritates u et v ſemper eiusmodi debent eſſe functiones coordinatarum x et y, praeter tempus t, vt poſito tempore conſtante formula $udx + vdy$ integrationem admittat.

49. Hinc autem porro ipſam preſſionem p definire poterimus, id quod abſolute eſt neceſſarium, ad motum fluidi perfecte determinandum. Cum enim inuenerimus $M = l$, erit

$$dp = \alpha dx - 2u(Ldx + ldy) - 2v(ldx + mdy) - 2\mathfrak{L}dx - 2\mathfrak{M}dy + \mathfrak{R}dt.$$

At eſt $Ldx + ldy = du - \mathfrak{L}dt$; $ldx + mdy = dv - \mathfrak{M}dt$, vnde fit:

$$dp = \alpha dx - 2udu - 2vdv + 2\mathfrak{L}udt + 2\mathfrak{M}vdt - 2\mathfrak{L}dx - 2\mathfrak{M}dy + \mathfrak{R}dt.$$

Quodſi ergo preſſionem in ſingulis fluidi punctis pro tempore praeſente definire velimus, nullo reſpectu ad eius mutationem cum tempore oriundam habito, iſta nobis conſideranda erit aequatio:

$$dp = \alpha dx - 2udu - 2vdv - 2\mathfrak{L}dx - 2\mathfrak{M}dy$$

eſtque noſtro deſignandi modo $L = \frac{dv}{dt}$ et $\mathfrak{M} = \frac{dv}{dt}$; hincque

$$dp = \alpha dx - 2udu - 2vdv - 2\frac{du}{dt} \cdot dx - 2\frac{dv}{dt} \cdot dy$$

in cuius aequationis integratione tempus t pro conſtanti eſt habendum.

50. Haec

50. Haec autem aequatio per hypothesin est integrabilis, atque reuera talis deprehenditur, si ad criterium huius motus attendamus, quo vidimus, esse debere $udx + vdy$ differentiale completum, si quidem tempus t constans assumamus. Sit igitur S eius integrale, quod ergo eiusmodi erit functio ipsarum x, y et t, vt posito $dt = o$, prodeat $dS = udx + vdy$: sumto autem quoque tempore t variabili ponamus haberi

$$dS = udx + vdy + U\,dt$$

eritque propterea $\frac{du}{dt} = \frac{dU}{dx}$ et $\frac{dv}{dt} = \frac{dU}{dy}$. Tum vero est $U = \frac{dS}{dt}$.

51. His valoribus introductis habebitur:

$$\frac{du}{dt}.\,dx + \frac{dv}{dt}.\,dy = \frac{dU}{dx}.\,dx + \frac{dU}{dy}.\,dy$$

huiusque formulae cum tempus t constans sumatur integrale manifesto est $= U$. Quod quo clarius appareat, ponamus $dU = K\,dx + k\,dy$, erit $\frac{dU}{dx} = K$ et $\frac{dU}{dy} = k$, vnde $\frac{dU}{dx}.\,dx + \frac{dU}{dy}.\,dy = K\,dx + k\,dy = dU$. Cum igitur huius integrale sit $= U = \frac{dS}{dt}$: erit

$$dp = \alpha dx - 2udu - 2vdv - 2dU$$

vnde integrando prodit:

$$p = \text{Const.} + \alpha x - uu - vv - \frac{2dS}{dt}.$$

existente S functione ipsarum x, y et t, cuius differentiale posito $dt = o$, est $udx + vdy$.

52. Quo indoles huius formulae melius intelligatur, consideremus puncti l celeritatem veram, quae sit $= V = \sqrt{(uu + vv)}$. Atque erit pressio: $p = \text{Const.} + \alpha x - VV - \frac{2dS}{dt}$: in quo postremo termino dS de-

notat differentiale ipſius $S = \int (u\,dx + v\,dy)$, ſi tantum tempus t vt variabile ſpectetur.

53. Si iam frictionis quoque rationem habere velimus, eamque preſſioni p proportionalem ſtatuamus, dum punctum l elementum ds percurrit, erit vis retardatrix a frictione oriunda $= \frac{p}{f}$; vnde poſito $\frac{ds}{dt} = U$, aequatio noſtra differentialis, poſito t conſtante, erit:

$$dp = \alpha\,dx - \frac{p}{f}\,ds - 2\,V\,dV - 2\,dU$$

vnde integrando oritur, ſumto e pro numero, cuius logarithmus hyperbolicus eſt $= 1$,

$$p = e^{\frac{-s}{f}} \int e^{\frac{s}{f}} (\alpha\,dx - 2\,V\,dV - 2\,dV) \text{ ſiue}$$

$$p = \alpha x - V\,V - 2\,U - \tfrac{1}{f} e^{\frac{-s}{f}} \int e^{\frac{s}{f}} (\alpha x - V\,V - 2\,U)\,ds$$

54. Cum igitur criterium motus, quo fluidum re vera mouetur, in hoc conſiſtat, vt poſito tempore conſtante, differentiale $u\,dx + v\,dy$ ſit completum: continuitas autem et conſtans vniformis denſitas exigat, vt ſit $\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} = 0$, hinc ſequitur quoque hoc differentiale $u\,dy + v\,dx$ fore completum. Quare vtrinque coniunctim celeritates u et v eiusmodi debent eſſe functiones coordinatarum x et y cum tempore t, vt hae ambae formulae $u\,dx + v\,dy$ et $u\,dy + v\,dx$ ſint differentialia completa.

55. Inſtituamus iam eandem inueſtigationem in genere, poſitisque puncti λ ternis celeritatibus ſecundum axes AL, AB, AC directis, u, v, w ſint eae eiusmodi functiones cum coordinatarum x, y, z, tum temporis t, vt differentiatione inſtituta fiat:

$du =$

$$du = \mathrm{L}\,dx + l\,dy + \lambda\,dz + \mathfrak{L}\,dt$$
$$dv = \mathrm{M}\,dx + m\,dy + \mu\,dz + \mathfrak{M}\,dt$$
$$dw = \mathrm{N}\,dx + n\,dy + \nu\,dz + \mathfrak{N}\,dt$$

et quanquam hic quoque tempus t variabile eſt aſſumtum, tamen, vt motus ſit poſſibilis, per conditionem praecedentem oportet eſſe $\mathrm{L} + m + \nu = 0$, ſiue quod eodem redit:

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0$$

a qua proprietate quidem praeſens examen non pendet.

56. Elapſo autem tempuſculo dt, punctum λ transfertur in π, et ſecundum axem AL percurrit ſpatiolum $= u\,dt$, ſecundum axem AB ſpatiolum $= v\,dt$ et ſecundum axem AC ſpatiolum $w\,dt$. Quare nunc puncti λ in π exiſtentis ternae celeritates erunt:

ſecund. $\mathrm{AL} = u + \mathrm{L}u\,dt + l v\,dt + \lambda w\,dt + \mathfrak{L}\,dt$
ſecund. $\mathrm{AB} = v + \mathrm{M}u\,dt + m v\,dt + \mu w\,dt + \mathfrak{M}\,dt$
ſecund. $\mathrm{AC} = w + \mathrm{N}u\,dt + n v\,dt + \nu w\,dt + \mathfrak{N}\,dt$

hincque accelerationes ſecundum easdem directiones erunt:

ſec. $\mathrm{AL} = 2(\mathrm{L}u + lv + \lambda w + \mathfrak{L})$
ſec. $\mathrm{AB} = 2(\mathrm{M}u + mv + \mu w + \mathfrak{M})$
ſec. $\mathrm{AC} = 2(\mathrm{N}u + nv + \nu w + \mathfrak{N})$

57. Si axem AC verticalem ſtatuamus, ita vt reliqui bini AL et AB ſint horizontales, ob grauitatem vis acceleratrix oritur ſecundum Axem $\mathrm{AC} = -1$. Tum vero poſita preſſione in $\lambda = p$, eiusque differentiali, ſumto tempore conſtante,

$$dp = \mathrm{R}\,dx + r\,dy + \varrho\,dz$$

hinc

hinc orientur ternae vires acceleratrices

sec. $AL = -R$; sec. $AB = -r$ et sec. $AC = -\varrho$

quippe quae facile simili modo colliguntur, quo ante §. 44 et 45. sumus vsi, ita vt superfluum foret, idem ratiocinium repetere. Quam ob rem habebimus has aequationes:

$$R = -2(Lu + lv + \lambda w + \mathfrak{L})$$
$$r = -2(Mu + mv + \mu w + \mathfrak{M})$$
$$\varrho = -1 - 2(Nu + nv + \nu w + \mathfrak{N})$$

58. Cum autem formula $dp = R\,dx + r\,dy + \varrho\,dz$ debeat esse differentiale completum, erit

$$\frac{dR}{dy} = \frac{dr}{dx}; \quad \frac{dR}{dz} = \frac{d\varrho}{dx}; \quad \frac{dr}{dz} = \frac{d\varrho}{dy}.$$

at differentiatione peracta obtinebuntur per -2 diuidendo tres sequentes aequationes

$$\text{I}\ \left\{\begin{aligned}&\frac{u\,dL}{dy} + \frac{v\,dl}{dy} + \frac{w\,d\lambda}{dy} + \frac{d\mathfrak{L}}{dy} + Ll + lm + \lambda n = \\ &\frac{u\,dM}{dx} + \frac{v\,dm}{dx} + \frac{w\,d\mu}{dx} + \frac{d\mathfrak{M}}{dx} + ML + mM + \mu N\end{aligned}\right.$$

$$\text{II}\ \left\{\begin{aligned}&\frac{u\,dL}{dz} + \frac{v\,dl}{dz} + \frac{w\,d\lambda}{dz} + \frac{d\mathfrak{L}}{dz} + \mathfrak{L}\lambda + l\mu + \lambda\nu = \\ &\frac{u\,dN}{dx} + \frac{v\,dn}{dx} + \frac{w\,d\nu}{dx} + \frac{d\mathfrak{N}}{dx} + NL + nM + \nu N\end{aligned}\right.$$

$$\text{III}\ \left\{\begin{aligned}&\frac{u\,dM}{dz} + \frac{v\,dm}{dz} + \frac{w\,d\mu}{dz} + \frac{d\mathfrak{M}}{dz} + M\lambda + m\mu + \mu\nu = \\ &\frac{v\,dN}{dy} + \frac{v\,dn}{dy} + \frac{w\,d\nu}{dy} + \frac{d\mathfrak{N}}{dy} + Nl + nm + \nu n\end{aligned}\right.$$

59. Est autem ex natura differentialium completorum

$$\frac{dL}{dy} = \frac{dl}{dx}; \quad \frac{dm}{dx} = \frac{dM}{dy}; \quad \frac{d\lambda}{dy} = \frac{dl}{dz}; \quad \frac{d\mu}{dx} = \frac{dM}{dz}; \quad \frac{d\mathfrak{L}}{dy} = \frac{dl}{dt}; \quad \frac{d\mathfrak{M}}{dx} = \frac{dM}{dt}$$
$$\frac{dL}{dz} = \frac{d\lambda}{dx}; \quad \frac{dl}{dz} = \frac{d\lambda}{dy}; \quad \frac{dn}{dx} = \frac{dN}{dy}; \quad \frac{d\nu}{dx} = \frac{dN}{dz}; \quad \frac{d\mathfrak{L}}{dz} = \frac{d\lambda}{dt}; \quad \frac{d\mathfrak{N}}{dx} = \frac{dN}{dt}$$
$$\frac{dM}{dz} = \frac{d\mu}{dx}; \quad \frac{dN}{dy} = \frac{dn}{dx}; \quad \frac{dm}{dz} = \frac{d\mu}{dy}; \quad \frac{d\nu}{dy} = \frac{dn}{dz}; \quad \frac{d\mathfrak{M}}{dz} = \frac{d\mu}{dt}; \quad \frac{d\mathfrak{N}}{dy} = \frac{dn}{dt}$$

quibus

quibus valoribus ſubſtitutis tres illae aequationes abibunt in has:

$$\left(\frac{dl-dM}{dt}\right)+u\left(\frac{dl-dM}{dx}\right)+v\left(\frac{dl-dM}{dy}\right)+w\left(\frac{dl-dM}{dz}\right)+(l-M)(L+m)+\lambda n-\mu N=0$$
$$\left(\frac{d\lambda-dN}{dt}\right)+u\left(\frac{d\lambda-dN}{dx}\right)+v\left(\frac{d\lambda-dN}{dy}\right)+w\left(\frac{d\lambda-dN}{dz}\right)+(\lambda-N)(L+\nu)+l\mu-nM=0$$
$$\left(\frac{d\mu-dn}{dt}\right)+u\left(\frac{d\mu-dn}{dx}\right)+v\left(\frac{d\mu-dn}{dn}\right)+w\left(\frac{d\mu-dn}{dz}\right)+(\mu-n)(m+\nu)+M\lambda-Nl=0$$

60. Manifeſtum iam eſt, his tribus aequationibus ſatisfieri ſequentibus tribus valoribus:

$$l=M;\quad \lambda=N;\quad \mu=n$$

quibus continetur criterium, quod conſideratio ſollicitationum ſuppeditat. Hinc ergo ſequitur fore recepto deſignandi modo

$$\frac{du}{dy}=\frac{dv}{dx};\quad \frac{du}{dz}=\frac{dw}{dx};\quad \frac{dv}{dz}=\frac{dw}{dy}.$$

hae autem ipſae ſunt illae conditiones, quae requiruntur, vt haec formula $udx+vdy+wdz$ ſit differentiale completum. Ex quo hoc criterium in eo conſiſtit, vt ternae celeritates u, v et w eiusmodi eſſe debeant functiones ipſarum x, y et z vna cum t, vt poſito tempore conſtante formula $udx+vdy+wdz$ integrationem admittat.

61. Cum ergo poſito tempore t conſtante, ſeu $dt=0$, ſit

$$du=Ldx+Mdy+Ndz$$
$$dv=Mdx+mdy+ndz$$
$$dw=Ndx+ndy+\nu dz$$

valores autem pro R, r et ϱ fiant:

$$R=-2(Lu+Mv+Nw+\mathfrak{L})$$
$$r=-2(Mu+mv+nw+\mathfrak{M})$$
$$\varrho=-1-2(Nu+nv+\nu w+\mathfrak{N})$$

 pro

pro statu pressionis p haec habebitur aequatio

$$\begin{aligned} dp = -dz - 2u(Ldx + Mdy + Ndz) &= -dz - 2udu - 2vdv - 2wdw \\ -2v(Mdx + mdy + ndz) &\quad -2\mathfrak{L}dx - 2\mathfrak{M}dy - 2\mathfrak{N}dz \\ -2w(Ndx + ndy + vdz) & \\ -2\mathfrak{L}dx - 2\mathfrak{M}dy - 2\mathfrak{N}dz & \end{aligned}$$

62. Quia vero est $\mathfrak{L} = \frac{du}{dt}$; $\mathfrak{M} = \frac{dv}{dt}$; $\mathfrak{N} = \frac{dw}{dt}$; erit integrando:

$$p = C - z - uu - vv - ww - 2\int\left(\frac{du}{dt}.dx + \frac{dv}{dt}.dy + \frac{dw}{dt}.dz\right)$$

Cum autem per conditionem inuentam sit $udx + vdy + wdz$ integrabile, ponatur eius integrale $= S$, quod, quoniam etiam tempus t inuoluere potest, sit sumto quoque t variabili:

$$dS = udx + vdy + wdz + Udt$$

eritque $\frac{du}{dt} = \frac{dU}{dx}$; $\frac{dv}{dt} = \frac{dU}{dy}$; $\frac{dw}{dt} = \frac{dU}{dz}$; Quare cum sit in genere sumto tempore t constante, vti id quidem in superiori integrali assumitur,

$$\frac{dU}{dx}.dx + \frac{dU}{dy}.dy + \frac{dU}{dz}.dz = dU$$

habebimus:

$$p = C - z - uu - vv - ww - 2U, \text{ siue}$$
$$p = C - z - uu - vv - ww - 2\frac{dS}{dt}$$

63. Perspicuum hic est, $uu + vv + ww$ exprimere quadratum verae puncti λ celeritatis ita, vt, si celeritas huius puncti vera dicatur $= V$, habeatur pro pressione ista aequatio:

$$p = C - z - VV - \frac{2dS}{dt}$$

ad quam ergo inueniendam, primum formulae $udx + vdy + wdz$, quam completam esse oportet, quaeratur integrale S, hocque denuo differentietur, posito solo tempore

pore t variabili, quod differentiale per dt diuisum, dabit valorem formulae $\frac{ds}{dt}$, quae in expressionem pro statu pressionis p inuentam ingreditur.

64. Quodsi iam prius criterium, quo motus saltem possibilis continetur, hic adiungamus, ternae celeritates u, v, w eiusmodi functiones ternarum coordinatarum x, y et z vna cum tempore t esse debent, vt primo sit $udx + vdy + wdz$ differentiale completum; deinde vero, vt sit $\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0$. Hisque duabus conditionibus omnis fluidorum motus, siquidem densitate inuariabili sint praeditae, subiicitur. Praeterea vero, si sumto etiam tempore t variabili, haec formula $udx + vdy + wdz + Udt$ fuerit differentiale completum, status pressionis in puncto quocunque λ exprimitur, altitudine p, vt sit:

$$p = C - z - uu - vv - ww - 2U$$

siquidem fluidum grauitate naturali gaudeat, et planum BAL fuerit horizontale.

65. Si grauitati aliam directionem tribuissemus, siue etiam vires vtcunque variabiles assumsissemus, quibus singulae fluidi particulae sollicitarentur, inde tantum discrimen in valorem pressionis p esset ingressum, neque inde lex, quam ternae cuiusque puncti fluidi celeritates sequi debent, vllam mutationem esset passa. Semper ergo, quaecunque fuerint vires sollicitantes, ternae celeritates u, v, et w ita debent esse comparatae, vt formula $udx + vdy + wdz$ fiat differentiale completum, atque vt insuper sit $\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0$. Infinitis igitur modis constitui poterunt ternae celeritates

 u, v

u, v et w, vt his duabus conditionibus ſatisfiat; atque tum preſſio fluidi in ſingulis punctis poterit aſſignari.

66. Multo difficilior autem foret quaeſtio, ſi, datis viribus ſollicitantibus, vna cum preſſione in quibusdam locis, ipſe motus fluidi in ſingulis punctis determinari deberet. Tum enim haberentur aliquot aequationes formae $p = C - z - uu - vv - ww - 2U$, ex quibus, cum conſtans C, tum vero ratio functionum u, v et w ita definiri deberet, vt non ſolum his caſibus iſtis aequationibus ſatisfieret, ſed etiam ante allatae regulae obſervarentur, quod opus vtique maximam calculi vim requireret. Conueniet igitur in genere in naturam functionum idonearum inquiri, quae vtrique criterio futurae ſint conformes.

67. Commodiſſime igitur incipiemus ab ipſa quantitate integrali, cuius differentiale eſſe oportet formulam $u\,dx + v\,dy + w\,dz$ poſito tempore conſtante. Sit ergo S hoc integrale, quod erit functio ipſarum x, y et z, tempore t in quantitatibus conſtantibus involuto; atque ſi haec quantitas S differentietur, coefficientes differentialium dx, dy et dz ſtatim praebebunt celeritates u, v et w, quae quidem praeſenti tempore conveniant puncto fluidi λ, cuius coordinatae ſunt x, y et z. Quaeſtio autem huc redit: vt definiatur, quales functiones ipſarum x, y et z, pro S aſſumi debeant, vt etiam fiat $\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0$; ſeu cum ſit $u = \frac{dS}{dx}$, $v = \frac{dS}{dy}$ et $w = \frac{dS}{dz}$, vt ſit $\frac{ddS}{dx^2} + \frac{ddS}{dy^2} + \frac{ddS}{dz^2} = 0$.

68. Quo-

68. Quoniam non patet, quomodo hoc generaliter praestari possit, casus quosdam generaliores contemplabor. Sit igitur

$$S = (Ax + By + Cz)^n$$

eritque:

$\frac{dS}{dx} = nA(Ax+By+Cz)^{n-1}$ et $\frac{ddS}{dx^2} = n(n-1)AA(Ax+By+Cz)^{n-2}$ similesque erunt formae pro $\frac{ddS}{dy^2}$ et $\frac{ddS}{dz^2}$, vnde effici debet, vt fit

$$n(n-1)(Ax+By+Cz)^{n-2}(AA+BB+CC) = 0$$

cui primo satisfit, si vel $n=0$, vel $n=1$; ex quo iam duo valores idonei obtinentur, scilicet $S =$ Const. et $S = Ax + By + Cz$, vbi constantes A, B, C etiam tempus vtcunque in se complecti possunt.

69. Sin autem n neque $=0$, neque $=1$, necesse est, vt sit: $AA + BB + CC = 0$: tumque pro S valor idoneus erit

$$S = (Ax + By + Cz)^n$$

quicunque numerus pro exponente n sumatur, quin etiam ipsum tempus t in n poterit ingredi. Patet etiam aggregatum quotcunque huiusmodi formularum idoneum valorem pro S praebere, ita, vt sit:

$$S = \alpha + \beta x + \gamma y + \delta z + \varepsilon(Ax+By+Cz)^n + \zeta(A'x+B'y+C'z)^{n'}$$
$$+ \eta(A''x+B''y+C''z)^{n''} + \theta(A'''x+B'''y+C'''z)^{n'''} \text{ etc.}$$

dummodo fuerit:

$$AA+BB+CC=0;\ A'A'+B'B'+C'C'=0;\ A''A''$$
$$+B''B''+C''C''=0 \text{ etc.}$$

70. Hinc valores idonei pro S ex inferioribus ordinibus, vbi coordinatae x, y, z, vel vnam, vel

 duas,

duas, vel tres, vel quatuor habent dimensiones, erunt sequentes.

I. $S = A$

II. $S = Ax + By + Cz$

III. $S = Axx + Byy + Czz + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz$

existente $A + B + C = 0$

IV. $S = Ax^3 + By^3 + Cz^3 + 3Dxxy + 3Fxxz + 3Hyyz + 6Kxyz$
$+ 3Exyy + 3Gxzz + 3Iyzz$

existente $A + E + G = 0$; $B + D + I = 0$; $C + F + H = 0$

$$\text{V.}\quad S = \begin{array}{l} + Ax^4 + 6Dxxyy + 4Gx^3y + 4Hxy^3 + 12Nxxyz \\ + By^4 + 6Exxzz + 4Ix^3z + 4Kxz^3 + 12Oxyyz \\ + Cz^4 + 6Fyyzz + 4Ly^3z + 4Myz^3 + 12Pxyzz \end{array}$$

existente $A + D + E = 0$ $\quad G + H + P = 0$
$B + D + F = 0$ $\quad I + K + O = 0$
$C + E + F = 0$ $\quad L + M + N = 0$

71. Hinc perspicuum est, quomodo hae formulae pro quolibet ordine se sint habiturae: singulis scilicet terminis primo iidem dentur coefficientes numerici, qui iisdem terminis ex lege permutationum conveniunt, seu, qui oriuntur, si trinomium $x + y + z$ ad potestatem eiusdem ordinis eleuetur. Numericis autem coefficientibus adiungantur litterales indefiniti A, B, C, etc. Tum reiectis numericis dispiciatur, quoties eiusmodi terni termini occurrunt $LZxx + MZyy + NZzz$, qui scilicet factorem communem Z ex variabilibus formatum habeant, totiesque summa coefficientium litteralium $L + M + N$ statuatur nihilo aequalis. Ita cum pro potestate quinta habeatur.

$$S = \begin{array}{l} + Ax^5 + 5Dx^4y + 5\mathfrak{D}x^4z + 10Gx^3yy + 10\mathfrak{G}x^3zz + 20Kx^3yz + 30Nxyyzz \\ + By^5 + 5Exy^4 + 5\mathfrak{E}y^4z + 10Hx^2y^3 + 10\mathfrak{H}y^3zz + 20Lxy^3z + 30Oxxyzz \\ + Cz^5 + 5Fxz^4 + 5\mathfrak{F}yz^4 + 10Ixxz^3 + 10\mathfrak{I}yyz^3 + 20Mxyz^3 + 30Pxxyyz \end{array}$$

sequen-

ſequentes habebuntur coefficientium litteralium determinationes:

$A+G+\mathfrak{G}=0$; $D+H+O=0$; $\mathfrak{D}+I+P=0$
$B+H+\mathfrak{H}=0$; $E+G+N=0$; $\mathfrak{E}+\mathfrak{J}+P=0$; $K+L+M=0$
$C+I+\mathfrak{J}=0$; $F+\mathfrak{G}+N=0$; $\mathfrak{F}+\mathfrak{H}+O=0$

Simili modo pro ordine ſexto huiusmodi determinationes prodibunt 15, pro ſeptimo 21, pro octauo 28 et ita porro.

72. Iam formula prima $S=A$, quoniam coordinatas x, y et z plane non in ſe complectitur, ternas celeritates u, v, et w nihilo aequales praebebit, ſicque ſtatum fluidi quietum exhibebit. Preſſio tamen in quouis puncto pro variis temporibus vtcunque poterit eſſe variabilis. Cum enim A ſit functio quaecunque temporis, ad datum tempus t preſſio in puncto λ erit $p=C-\frac{2\,dA}{dt}-z$: qua formula eiusmodi fluidi ſtatus indicatur, vbi fluidum quouis momento a viribus quibuscunque ſollicitatur, quae tamen ſe ſemper in aequilibrio teneant, vt ab illis nullus motus in fluido oriri queat: vbi euenit, ſi fluidum vaſi fuerit incluſum, ex quo nusquam erumpere queat, atque in eo a viribus quibuscunque comprimatur.

73. Formula autem ſecunda $S=Ax+By+Cz$ differentiata, has praebebit puncti λ ternas celeritates:

$$u=A;\ v=B \text{ et } w=C.$$

Eodem ergo tempore omnia fluidi puncta pari motu feruntur ſecundum eandem directionem. Ex quo totum fluidum, perinde ac corpus ſolidum, mouebitur, quod ſolo motu progreſſiuo fertur. Diuerſo autem tempore

pore huius motus tam celeritas, quam directio, vtcunque variari poterit, prout vires extrinsecus vrgentes exegerint. Pressio ergo in puncto λ ad tempus t, cuius A, B, C sunt functiones, erit $p = C - z - AA - CC - 2x.\frac{dA}{dt} - 2y.\frac{dB}{dt} - z\frac{dC}{dt}$.

74. Formula tertia $S = Axx + Byy + Czz + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz$, vbi est $A + B + C = 0$, has praebebit ternas puncti λ celeritates: $u = 2Ax + 2Dy + 2Ez$; $v = 2By + 2Dx + 2Fz$; $w = 2Cz + 2Ex + 2Fy$, seu $w = 2Ex + 2Fy - 2(A + B)z$. Hoc ergo casu etiam eodem temporis momento diuersa fluidi puncta diuerso motu feruntur; successu autem temporis etiam eiusdem puncti motus quomodocunque variabilis existere potest, quia pro A, B, D, E, F functiones quascunque temporis t assumere licet. Multo maior autem varietas locum habebit, si functioni S valores magis compositi tribuantur.

75. Quia casu secundo motus fluidi conueniebat cum motu corporis solidi progressiuo, quo scilicet vnoquoque momento singulae partes motu aequali sibique parallelo feruntur: suspicari liceat, in aliis casibus motum fluidi, quoque cum motu corporis solidi, siue rotatorio, siue vtcunque anomalo conuenire posse. Satis igitur erit ostendisse huiusmodi conuenientiam, praeter
Tab. IV. casum secundum, nunquam locum habere posse. Vt
Fig. 2. enim hoc eueniret, necesse esset, vt pyramis $\pi\Phi\varrho\sigma$ non solum aequalis, sed etiam similis fieret pyramidi $\lambda\mu\nu o$; seu vt foret:

$\pi\Phi =$

$$\pi\phi = \lambda\mu = dx = \sqrt{(QQ + qq + \phi\phi)}$$
$$\pi\varrho = \lambda\nu = dy = \sqrt{(RR + rr + \varrho\varrho)}$$
$$\pi\sigma = \lambda o = dz = \sqrt{(SS + ss + \sigma\sigma)}$$
$$\phi\varrho = \mu\nu = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \sqrt{((Q-R)^2 + (q-r)^2 + (\phi-\varrho)^2)}$$
$$\phi\sigma = \mu o = \sqrt{(dx^2 + dz^2)} = \sqrt{((Q-S)^2 + (q-s)^2 + (\phi-\sigma)^2)}$$
$$\varrho\sigma = \nu o = \sqrt{(dy^2 + dz^2)} = \sqrt{((R-S)^2 + (r-s)^2 + (\varrho-\sigma)^2)}$$

adhibitis valoribus in §. 32. vſurpatis.

76. Ternae autem poſteriores aequationes, cum prioribus coniunctae, reducentur ad has:

$$QR + qr + \phi\varrho = 0;\ QS + qs + \phi\sigma = 0 \text{ et } RS + rs + \varrho\sigma = 0$$

ternae autem priores, ſi pro litteris Q, R, S, q, r, s, ϕ, ϱ, σ valores in §. 34. aſſignati ſubſtituantur, terminique prae reliquis euaneſcentes praetermittantur, dabunt has aequationes:

$$1 = 1 + 2L\,dt;\ l + M = 0$$
$$1 = 1 + 2m\,dt;\ \lambda + N = 0$$
$$1 = 1 + 2\nu\,dt;\ \mu + n = 0$$

vnde fit $L = 0$, $m = 0$, et $\nu = 0$, $M = -l$; $N = -\lambda$ et $n = -\mu$.

77. Celeritates ergo ternae cuiusque puncti λ eſſe deberent ita comparatae, vt foret

$$du = l\,dy + \lambda\,dz$$
$$dv = l\,dx + \mu\,dz$$
$$dw = \lambda\,dx + \mu\,dy$$

Verum ſecunda conditio motus fluidorum poſtulat, vt ſit $l = M$, $\lambda = N$ et $n = \mu$; vnde omnes coefficien-

 tes

tes l, λ et μ euanescent, celeritatesque u, v et w pro eodem tempore in omnibus fluidi punctis eaedem, seu constantes, prodibunt. Patet igitur, non nisi hoc casu fluidi motum cum motu corporis solidi conuenire posse.

78. Vt autem effectus virium, quae extrinsecus in fluidum agunt, definiri possit, primum eae vires determinari debent, quae ad motum, quem fluido inesse assumimus, efficiendum requiruntur: his enim viribus eae, quae actu fluidum sollicitant, aequiualentes statui debent; supra autem §. 56. vidimus, in puncto λ ternas vires acceleratrices requiri, quae ibi sunt relatae. Quare si fluidi elementum ibi concipiatur, cuius volumen, seu massa, sit $= dx\,dy\,dz$, vires motrices ad motum requisitae erunt:

$$\text{sec. } AL = 2\,dx\,dy\,dz(Lu + lv + \lambda w + \mathfrak{L}) = 2\,dx\,dy\,dz\left(u.\frac{\partial u}{\partial x} + v.\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t}\right)$$
$$\text{sec. } AB = 2\,dx\,dy\,dz(Mu + mv + \mu w + \mathfrak{M}) = 2\,dx\,dy\,dz\left(u\frac{\partial v}{\partial x} + v.\frac{\partial v}{\partial y} + w.\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial t}\right)$$
$$\text{sec. } AC = 2\,dx\,dy\,dz(Nu + nv + \nu w + \mathfrak{N}) = 2\,dx\,dy\,dz\left(u.\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w.\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial t}\right)$$

vnde per triplicem integrationem vires totales, quae totam fluidi massam secundum easdem directiones sollicitare debent, colligentur.

79. Cum autem secunda conditio postulet, vt sit $u\,dx + v\,dy + w\,dz$ differentiale completum, cuius integrale sit $= S$; ponatur posito quoque tempore variabili, vt ante: $dS = u\,dx + v\,dy + w\,dz + U\,dt$, vnde ob $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$; $\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x}$; $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial x}$ etc. tres illae vires motrices euadent:

$$\text{sec. } AL = 2\,dx\,dy\,dz\left(\frac{u\partial u + v\partial v + w\partial w + \partial U}{\partial x}\right)$$
$$\text{sec. } AB = 2\,dx\,dy\,dz\left(\frac{u\partial u + v\partial v + w\partial w\partial U}{\partial y}\right)$$
$$\text{sec. } AC = 2\,dx\,dy\,dz\left(\frac{u\partial u + v\partial v + w\partial w + \partial U}{\partial z}\right).$$

80. Po-

80. Ponatur nunc $uu + vv + ww + 2U = T$, eritque T functio coordinatarum x, y, z; ponatur ergo posito tempore constante,

$$dT = K dx + k dy + u dz$$

eruntque tres illae vires motrices elementi $dx\,dy\,dz$

sec. $AL = K\,dx\,dy\,dz$

sec. $AB = k\,dx\,dy\,dz$

sec. $AC = k\,dx\,dy\,dz$

triplici ergo integratione hae formulae per totam fluidi massam sunt extendendae, vt inde vires omnibus aequiualentes earumque mediae directiones obtineantur. Verum haec discussio est altioris indaginis, cui hic non immoror.

81. Quantitas autem haec $T = uu + vv + ww + 2U$, cuius in hoc calculo ratio est habenda, etiam simpliciorem formulam pro altitudine p pressionem exprimente suppeditat; est enim $p = C - z - T$: siquidem singulae fluidi particulae a sola grauitate vrgeantur Sin autem quaelibet particula λ a ternis viribus acceleratricibus sollicitetur, quae sint Q, q et Φ, secundum directiones axium AF, AB et AC respectiue agentes, et calculo, vt supra, subducto reperietur pressio:

$$p = C + \int (Q\,dx + q\,dy + \Phi\,dz) - T$$

vnde patet differentiale $Q\,dx + q\,dy + \Phi\,dz$ completum esse debere, alioquin status aequilibrii, vel saltem possibilis, non daretur. Hanc autem conditionem in vires sollicitantes Q, q et Φ competere oportere, a Cel. D^no^. *Clairaut* iam praeclare est demonstratum.

Qq 2 82. En

82. En ergo principia vniuersae doctrinae de motu fluidorum, quae etsi primo intuitu non admodum foecunda videantur, tamen fere omnia, quae adhuc tam in hydrostatica, quam in hydraulica sunt tradita, in se complectuntur, ita vt haec principia latissime patere sint censenda. Quod quo clarius appareat, operae pretium erit ostendere, quomodo cognita hydrostaticae et hydraulicae praecepta ex hactenus traditis principiis plane ac dilucide consequantur.

83. Consideremus igitur primo fluidum in statu quietis, ita vt sit $u = 0$; $v = 0$ et $w = 0$, eritque pressio in quouis fluido puncto λ, ob $T = 2U$,

$$p = C + \int (Q\,dx + q\,dy + \Phi\,dz) - 2U$$

vbi, cum U sit functio ipsius temporis t, quod constans assumimus, quia pressionem ad datum tempus inuestigamus, haec quantitas U in ipsa constante C comprehendi poterit, ita vt sit:

$$p = C + \int (Q\,dx + q\,dy + \Phi\,dz)$$

vbi Q, q et Φ sunt vires particulam aquae λ secundum axes AL, AB et AC sollicitantes.

84. Quoniam pressio p non nisi a situ puncti λ, hoc est a coordinatis x, y et z, pendere potest, necesse est, vt $\int (Q\,dx + q\,dy + \Phi\,dz)$ sit earum functio determinata, quae ergo integrationem admittat. Vnde primo patet, quod modo innui, fluidum in aequilibrio subsistere non posse, nisi vires, singula fluidi elementa sollicitantes, ita fuerint comparatae, vt formula $Q\,dx + q\,dy + \Phi\,dz$ sit differentiale completum. Cuius ergo integrale si ponatur $= P$, erit pressio in λ, $p =$

$C + P$;

$C + P$: Ita ſi ſola adſit grauitas ſecundum directionem CA vrgens, erit $p = C - z$, vnde ſi preſſio in vno puncto λ conſtet, vnde conſtans C colligi queat, pro eodem tempore inde preſſio in omnibus omnino punctis definietur.

85. Interim tamen tempore fluente preſſio in eodem loco variari poterit, id quod ſcilicet eueniet, ſi vires aquam extrinſecus vrgentes, quarum ratio nondum eſt habita in iis viribus, quae in ſingula elementa ſingulatim agere aſſumuntur, fuerint variabiles, ita tamen, vt ſe mutuo in aequilibrio ſeruent, nullumque motum producant. Quod ſi autem hae vires nulli mutationi ſint obnoxiae, littera C denotabit quantitatem reuera conſtantem, neque a tempore t pendentem; eodemque in loco λ perpetuo eadem preſſio $p = C + P$ reperietur.

86. In huiusmodi ergo fluidi ſtatu permanente eius extrema figura, quae nullis viribus eſt expoſita, determinari poterit. In hac enim extremitate, qua fluidum ſibi eſt relictum, neque a parietibus vaſis, cui forte eſt incluſum, continetur, neceſſe eſt, vt preſſio ſit nulla. Habebitur ergo haec aequatio: $P = \text{conſt.}$ qua figura extremae ſuperficiei fluidi per relationem inter ternas coordinatas x, y et z, exprimetur. Atque ſi pro extremitate fuerit $P = E$, ob $C = - E$, in quouis alio loco λ interno erit preſſio $p = P - E$. Ita ſi particulae fluidi a ſola grauitate vrgeantur, ob $p = C - z$, pro extremitate ſuperficiei habebitur $z = C$, qua intelligitur, extremam ſuperficiem liberam eſſe horizontalem.

 87. De-

87. Deinde etiam omnia, quae adhuc de motu fluidi per tubos sunt eruta, ex his principiis facile deducuntur. Tubi autem vel angustissimi considerari solent, vel tales assumuntur, vt per quamlibet sectionem ad tubum normalem fluidum aequali motu transfluat: vnde haec regula nascitur, vt celeritas fluidi in quouis tubi loco sit eius amplitudini reciproce proportionalis. Sit igitur λ punctum quodcunque huiusmodi tubi,
Tab. IV. Fig. 2. cuius figura per geminam aequationem inter ternas coordinatas x, y et z exprimetur, ita vt inde pro quauis abscissa x, ambae reliquae y et z definiri queant.

88. Sit praeterea huius tubi amplitudo in $\lambda = rr$, in alio autem tubi loco fixo, vbi amplitudo sit $= ff$, sit tempore praesente fluidi celeritas $= \mathfrak{v}$, de hinc autem elapso tempusculo dt euadat ea $= \mathfrak{v} + d\mathfrak{v}$ eritque ergo $\mathfrak{v}$ functio tempus t tantum, pariter ac $\frac{d\mathfrak{v}}{dt}$. Hinc ergo vera fluidi celeritas in λ erit tempore praesenti $V = \frac{ff\mathfrak{v}}{rr}$. Cum nunc ex figura tubi dentur y et z per x, sit $dy = \eta dx$ et $dz = \theta dx$; vnde ternae puncti fluidi in λ celeritates erunt secundum directiones AL, AB et AC sequentes:

$$u = \frac{ff\mathfrak{v}}{rr} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1 + \eta\eta + \theta\theta)}}; \; v = \frac{ff\mathfrak{v}}{rr} \cdot \frac{\eta}{\sqrt{(1 + \eta\eta + \theta\theta)}}; \; w = \frac{ff\mathfrak{v}}{rr} \cdot \frac{\theta}{\sqrt{(1 + \eta\eta + \theta\theta)}}$$

hincque fit $uu + vv + ww = VV = \frac{f^4 \mathfrak{v}\mathfrak{v}}{r^4}$: estque rr functio ipsius x, indeque pendentium y et z.

89. Cum nunc $u\,dx + v\,dy + w\,dz$ debeat esse differentiale completum, cuius integrale posuimus $= S$, erit:

$$dS = \frac{ff\mathfrak{v}}{rr} \cdot \frac{dx(1 + \eta\eta + \theta\theta)}{\sqrt{(1 + \eta\eta + \theta\theta)}} = \frac{ff\mathfrak{v}}{rr} \cdot dx\sqrt{(1 + \eta\eta + \theta\theta)}.$$

At $dx\sqrt{(1 + \eta\eta + \theta\theta)}$ exprimit elementum ipsius tubi, bi, quod si ponamus $= ds$, erit $dS = \frac{ffv\,ds}{rr}$: vnde cum hic tempus t constans sit assumtum, cuius functio est v; quantitates autem s et rr non a tempore t, sed tantum a figura tubi, pendeant; erit $S = v\int\frac{ff\,ds}{rr}$.

90. Ad pressionem iam p, quae nunc in tubi puncto λ locum habet, inueniendam, considerari debet quantitas U, quae ex differentiatione quantitatis S oritur, si solum tempus t, vt variabile, tractetur, ita vt sit $U = \frac{dS}{dt}$. Cum igitur formula integralis $\int\frac{ff\,ds}{rr}$ tempus t non inuoluat, erit vtique $\frac{dS}{dt} = U = \frac{dv}{dt}\int\frac{ff\,ds}{rr}$; sicque erit ex §. 80:

$$T = \frac{f^4 vv}{r^4} + \frac{2\,dv}{dt}\int\frac{ff\,ds}{rr}$$

Quare positis quibuscunque viribus sollicitantibus Q, q et Φ, erit pressio in λ:

$$p = C + \int(Q\,dx + q\,dy + \Phi\,dz) - \frac{f^4 vv}{r^4} - \frac{2\,dv}{dt}\int\frac{ff\,ds}{rr}.$$

quae est ea ipsa formula, quae vulgo pro motu fluidi per tubos erui solet; atque adeo multo latius patens, quia vires quaecunque fluidum sollicitantes hic sunt assumtae, dum vulgo haec formula ad solam grauitatem adstringitur. Interim hic probe est recordandum, ternas vires Q, q, et Φ necessario ita comparatas esse oportere, vt formula: $Q\,dx + q\,dy + \Phi\,dz$ sit differentiale completum, seu integrationem admittat.

DE

Fig: 1. Fig: 3.

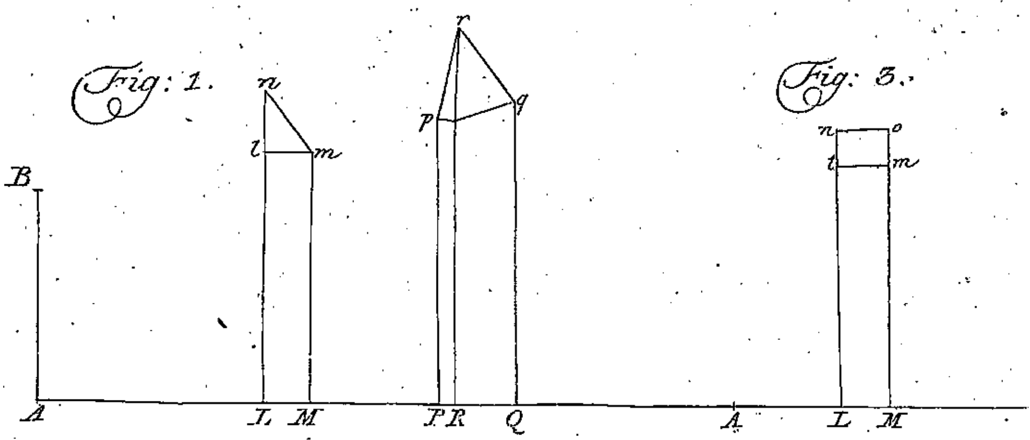

Fig: 2.