



UNIVERSITÉ DE NICE–SOPHIA ANTIPOLIS

U.F.R. SCIENCES

HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES

PRÉSENTÉE PAR

M. JÉRÉMIE BEC

CONCENTRATIONS ET FLUCTUATIONS
DANS LES SUSPENSIONS TURBULENTES

Soutenue le 4 juillet 2014 devant la Commission d'examen.

ERIC CLIMENT	<i>Rapporteur</i>
KRZYSZTOF GAWĘDZKI	<i>Examineur</i>
MICHEL LANCE	<i>Examineur</i>
HÉLÈNE POLITANO	<i>Examinatrice</i>
ALAIN PUMIR	<i>Rapporteur</i>
EMMANUEL VILLERMAUX	<i>Rapporteur</i>

*La plupart du temps, on ne résout pas les difficultés ;
on les déplace, comme la poussière.*

Aymond d'Alost

Table des matières

Liste des publications afférentes au mémoire	v
Introduction générale	1
Transport turbulent et particules inertielles	1
De la microphysique des nuages à la création des planètes	3
Organisation du mémoire	4
1 Concentrations préférentielles de particules inertielles dans les écoulements turbulents	5
1.1 Agrégats dynamiques fractals	6
1.1.1 Transport compressible, dimensions fractales et fluctuations des taux d'étirement	6
1.1.2 Distributions multifractales de particules lourdes aux échelles dissipatives	11
1.1.3 Cas des suspensions polydispersées	15
1.2 Concentration aux échelles inertielles de la turbulence	16
1.2.1 Particules dans des écoulements auto-similaires	16
1.2.2 Concentrations et vides en turbulence homogène développée	19
1.2.3 Un modèle heuristique pour les fluctuations de la masse	22
1.2.4 Concentrations de particules en turbulence MHD	30
2 Propriétés dynamiques des particules en suspension dans un écoulement turbulent	35
2.1 Accélération turbulente, vitesses lagrangiennes et sédimentation	36
2.1.1 Propriétés statistiques de l'accélération	36
2.1.2 Fonctions de structure lagrangiennes et filaments de vortacité	39
2.1.3 Sédimentation turbulente	41
2.2 Particules matérielles et effets de taille	43
2.2.1 Effet des fluctuations turbulentes sur la traînée et la poussée	44
2.2.2 Dynamique de particules de tailles inertielles et de flottabilité nulle	53
3 Caustiques et intermittence dans les différences de vitesse entre particules lourdes	63
3.1 Effet des caustiques sur les taux de collisions entre particules	63
3.1.1 Collisions fantômes et taux d'approche	64
3.1.2 Modélisation phénoménologique du noyau de collision	67
3.2 Suspensions stochastiques de particules lourdes	70
3.2.1 Système réduit et statistiques de la vitesse	71
3.2.2 Taux d'étirement et dispersion relative	74
3.2.3 Asymptotique des grands nombres de Stokes	76
3.3 Distribution des vitesses relatives dans les écoulements turbulents	78
3.3.1 Différences de vitesse aux échelles dissipatives	78
3.3.2 Comportement aux échelles inertielles	81
4 Dispersion relative dans les suspensions turbulentes	83
4.1 Dispersion relative de traceurs dans un écoulement turbulent	84
4.1.1 Comportement explosif et échelles de temps	85
4.1.2 Statistiques des différences de vitesse	88
4.1.3 Géométrie, intermittence et événements violents	92
4.1.4 Stationnarité du taux de transfert local	97
4.2 Dispersion de particules lourdes	101
4.2.1 Echelles dissipatives et exposants de Lyapunov	101
4.2.2 Effet de l'inertie sur la dispersion aux échelles inertielles	104
Conclusions et Perspectives	111
Bibliographie	117

Liste des publications afférentes au mémoire

(par ordre chronologique)

Les numéros renvoient aux sections du mémoire dans lesquelles ces travaux sont décrits.

- Fractal clustering of inertial particles in random flows §1.1.2
J. Bec, *Phys. Fluids* 15, L81–L84, 2003.
- Multifractal clustering in compressible flows §1.1.1
J. Bec, K. Gawędzki et P. Horvai, *Phys. Rev. Lett* 92, 224501, 2004.
- Multifractal concentrations of inertial particles in smooth random flows §1.1.2
J. Bec, *J. Fluid Mech.* 528, 255–277, 2005.
- Clustering and collisions of heavy particles in random smooth flows §3.1
J. Bec, A. Celani, M. Cencini et S. Musacchio, *Phys. Fluids* 17, 073301, 2005.
- Acceleration statistics of heavy particles in turbulence §2.1.1
J. Bec, L. Biferale, G. Boffetta, A. Celani, M. Cencini, A. Lanotte, S. Musacchio et F. Toschi, *J. Fluid Mech.* 550, 349–358, 2006.
- Dynamics and statistics of heavy particles in turbulent flows §1.1.2, 2.1.1
M. Cencini, J. Bec, L. Biferale, G. Boffetta, A. Celani, A. Lanotte, S. Musacchio et F. Toschi, *Journal of Turbulence* 7, 1–16, 2006.
- Effects of vortex filaments on the velocity of tracers and heavy particles in turbulence §2.1.2
J. Bec, L. Biferale, M. Cencini, A. Lanotte et F. Toschi, *Phys. Fluids* 18, 081702, 2006.
- Lyapunov exponents of heavy particles in turbulence §4.2.1
J. Bec, L. Biferale, G. Boffetta, M. Cencini, S. Musacchio et F. Toschi, *Phys. Fluids* 18, 091702, 2006.
- Heavy particles in incompressible flows : the large Stokes number asymptotics §4.2.1
J. Bec, M. Cencini et R. Hillerbrand, *Physica D* 226, 11–22, 2007.
- Clustering of heavy particles in random self-similar flow §1.2.1
J. Bec, M. Cencini et R. Hillerbrand, *Phys. Rev. E* 75, 025301, 2007.
- Heavy particle concentration in turbulence at dissipative and inertial scales §1.2.2
J. Bec, L. Biferale, M. Cencini, A. Lanotte, S. Musacchio et F. Toschi, *Phys. Rev. Lett.* 98, 084502, 2007.
- Toward a phenomenological approach to the clustering of heavy particles in turbulent flows §1.2.3
J. Bec et R. Chétrite, *New J. Phys.* 9, 77 (1-16), 2007.
- Stochastic suspensions of heavy particles §1.2.1, 4.2.1
J. Bec, M. Cencini, R. Hillerbrand et K. Turitsyn, *Physica D* 237, 2037–2050, 2008.
- Clustering of passive impurities in MHD turbulence §1.2.4
H. Homann, J. Bec, H. Fichtner et R. Grauer, *Phys. Plasmas* 16, 082308, 2009.
- Turbulent pair dispersion of inertial particles §4.2.2
J. Bec, L. Biferale, A. Lanotte, A. Scagliarini et F. Toschi, *J. Fluid Mech.* 645, 497–528, 2010.
- Intermittency in the velocity distribution of inertial particles §3.3
J. Bec, L. Biferale, M. Cencini, A. Lanotte, et F. Toschi, *J. Fluid Mech.* 646, 527–536, 2010.
- Finite-size effects in the dynamics of neutrally buoyant particles in turbulent flow §2.2.2
H. Homann et J. Bec, *J. Fluid Mech.* 651, 81–91, 2010.
- Diffusion in time-dependent random environments : mass fluctuations and scaling properties §1.2.3
G. Krstulovic, R. Bitane et J. Bec, *New J. Phys.* 14, 073053, 2012.
- Time scales of turbulent relative dispersion §4.1.1
R. Bitane, H. Homann et J. Bec, *Phys. Rev. E* 86, 045302, 2012.
- Geometry and violent events in turbulent pair dispersion §4.1.3
R. Bitane, H. Homann et J. Bec, *Journal of Turbulence* 14, 23–45, 2013.
- Effect of turbulent fluctuations on the drag and lift forces on a towed sphere and its boundary layer, §2.2.1
H. Homann, J. Bec et R. Grauer, *J. Fluid Mech.* 721, 155–179, 2013.
- Slipping motion of large neutrally-buoyant particles in turbulence §2.2.2
M. Cisse, H. Homann et J. Bec, *J. Fluid Mech.* 735, R1, 2013.
- Gravity-driven enhancement of heavy particle clustering in turbulent flow §2.1.3
J. Bec, H. Homann et S.S. Ray, *Phys. Rev. Lett.* 112, 184501, 2014.

Introduction générale

Transport turbulent et particules inertielles

L'étude des écoulements turbulents a de tout temps bénéficié d'allers-retours dialectiques entre champs et particules, c'est-à-dire entre une description eulérienne et une approche lagrangienne. Le formalisme statistique lagrangien proposé dans les années 1920 par le météorologiste britannique Lewis Fry Richardson, a longtemps souffert d'un manque de mesures expérimentales suffisamment fiables et précises. Ce n'est qu'au cours des dix dernières années que, stimulées par d'importantes avancées théoriques, de nouvelles expériences très sophistiquées et des simulations numériques à très haute résolution se sont sérieusement attaquées au problème de la turbulence lagrangienne, et d'une façon plus large, au problème du transport d'impuretés par un écoulement turbulent. Ce regain d'intérêt a fait émerger une dynamique où théoriciens, expérimentateurs et numériciens développent un nouveau point de vue commun sur ce problème. Une nouvelle famille de méthodes a vu le jour ; elle complète les outils traditionnels de la mécanique des fluides par des techniques empruntées à la physique statistique, à l'étude des systèmes dynamiques et des processus stochastiques, voire même à la théorie des champs.

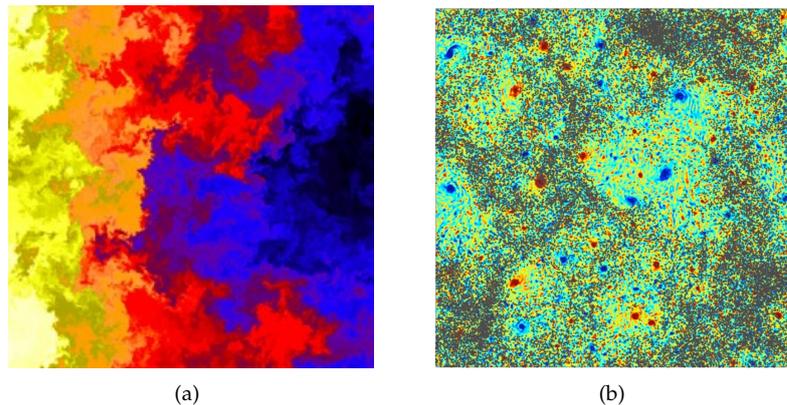


FIGURE 1 – (a) Champ scalaire transporté par un écoulement turbulent bidimensionnel en régime de cascade inverse d'énergie (d'après [CLMV01]) ; à noter la présence de variations très fortes du champ à travers une ligne verticale se situant vers le milieu de la figure. (b) Instantané de la position de particules inertielles lourdes dans un écoulement bidimensionnel ; les particules (représentées par des points gris) sont éjectées des structures de l'écoulement (apparaissant en bleu ou en rouge sur le fond de la figure).

Une question importante, liée à de nombreux problèmes naturels ou industriels, concerne le mélange, l'étirement et la diffusion des champs scalaires transportés par un écoulement turbulent incompressible. Un point central est l'observation de lois d'échelle anormales (non dérivables par analyse dimensionnelle) dans la distribution du traceur (voir [FGV01] pour une revue) ; il a pu être montré qu'une telle intermittence est due à la présence de « falaises », à travers lesquelles le champ scalaire subit de très fortes variations sur de très petites distances (voir Fig. 1(a)).

Des fluctuations encore plus violentes ont lieu dans le cas du transport de petites impuretés (telles que de la poussière, des gouttelettes ou des bulles) dont la dynamique ne peut se réduire à celle de traceurs passifs : elles forment des agrégats fractals, même lorsque l'écoulement porteur est incompressible (voir Fig. 1(b)). De telles particules ont une taille finie et une densité de masse différente de celle du fluide et la description de leur mouvement doit donc prendre en compte leur inertie, d'où leur nom de *particules inertielles*. En outre, selon qu'elles sont plus lourdes ou plus légères que le fluide, leur dynamique est en retard ou en avance sur l'écoulement, et ne préserve donc pas les volumes (voir Fig. 2(a)). Aux temps longs, les particules inertielles se concentrent sur des ensembles singuliers qui évoluent avec le mouvement du fluide, ce qui conduit à l'apparition de très fortes inhomogénéités dans leur distribution

spatiale, un phénomène appelé *concentration préférentielle* depuis les travaux de Squires et Eaton [SE91]. D'un point de vue expérimental, ces inhomogénéités sont connues depuis longtemps (voir [EF94] pour une revue) et utilisées pour visualiser les écoulements (en utilisant par exemple la migration des bulles vers le cœur des filaments de vorticité – voir [DCB91]).

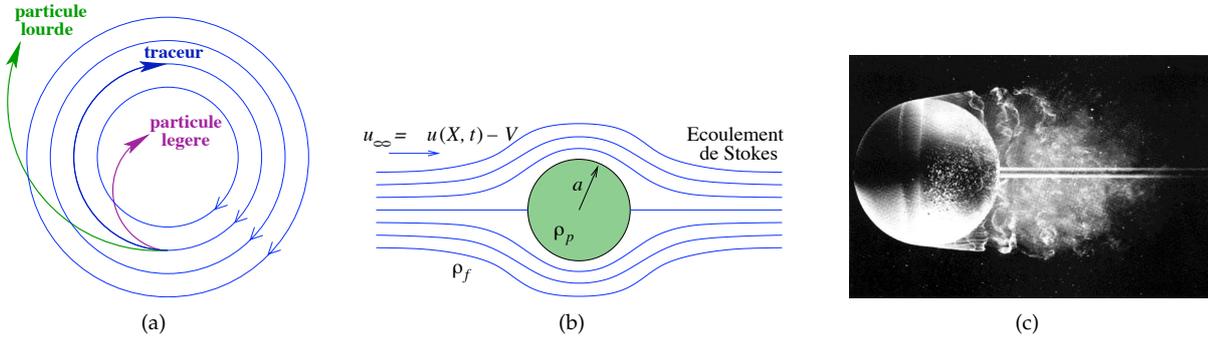


FIGURE 2 – (a) Les particules lourdes sont éjectées des zones de rotation de l'écoulement, tandis que les particules légères se concentrent en leur centre. (b) Pour écrire explicitement les forces s'exerçant sur une particule sphérique, on résout l'équation de Stokes non-stationnaire avec pour condition de bord $\mathbf{u} = 0$ sur la surface de la particule et $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{X}, t)$    l'infini. Cette approche n'est valable que lorsque la particule est suffisamment petite et est associée à un petit nombre de Reynolds. Lorsque ce n'est plus le cas, un sillage turbulent peut se développer (c) – d'après [VD82].

Comprendre de façon systématique la dynamique et les propriétés de concentration des impuretés dans les écoulements turbulents est un véritable défi qui exige de résoudre le mouvement du fluide porteur au voisinage de la particule. Dans la plupart des traitements analytiques et numériques, les impuretés sont supposées petites par rapport à l'échelle spatiale élémentaire du mouvement turbulent, à savoir l'échelle de Kolmogorov $\eta = \nu^{3/4}/\varepsilon^{1/4}$, où ν est la viscosité cinématique du fluide porteur et ε est le taux moyen d'injection d'énergie. Les interactions avec le fluide sont alors essentiellement à longue portée (par rapport à la taille de la particule), les interactions à courte portée étant fortement atténuées par la viscosité. Sous ces hypothèses, les impuretés peuvent être assimilées à des particules ponctuelles et leur dynamique est donnée par un développement asymptotique raccordant la solution de l'équation de Stokes au voisinage immédiat de la particule (voir Fig. 2(b))    l'écoulement porteur aux échelles plus grandes que la taille de la particule [Gat83, MR83]. Les forces agissant alors sur les particules sont la poussée d'Archimède, l'accélération du fluide non perturbé, le frottement visqueux de Stokes, la masse ajoutée, le terme d'histoire de Basset-Boussinesq et leur corrections de Fax  n respectives. Toutefois, la complexité de ces termes (et notamment du terme d'histoire) ne permet pas d'identifier de manière systématique les mécanismes physiques fondamentaux qui gouvernent la dynamique de telles particules. Pour cette raison, nous avons décidé de nous concentrer sur des particules bien plus lourdes que le fluide porteur, pour lesquels la force dominante est la traînée visqueuse de Stokes, de telle sorte que leurs trajectoires $\mathbf{X}(t)$ sont des solutions de

$$\ddot{\mathbf{X}} = -\frac{1}{\tau} \left(\dot{\mathbf{X}} - \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) \right). \quad (1)$$

Les points désignent ici des dérivées temporelles et $\mathbf{u}(\mathbf{X}, t)$ est la vitesse du fluide (non-perturbé)    la position de la particule. τ est le temps de réponse des particules (ou temps de Stokes) et dépend du rayon a de la particule, de sa densité de masse ρ_p , de celle du fluide ρ_f et de la viscosité cinématique ν de ce dernier à travers $\tau = 2\rho_p a^2 / (9\rho_f \nu)$. L'importance de l'inertie des particules est généralement quantifiée de façon non dimensionnelle par le *nombre de Stokes* défini par $St = \tau / \tau_f$ où τ_f est un temps caractéristique de l'écoulement porteur. En turbulence stationnaire développée, on choisit généralement le temps de retournement associée à l'échelle de Kolmogorov, c'est-à-dire $\tau_f = \tau_\eta = \sqrt{\nu/\varepsilon}$.

Cette approximation en termes de particules ponctuelles est adaptée à de nombreuses situations naturelles et industrielles, comme nous le verrons dans la section suivante. Toutefois, il arrive souvent que les particules considérées aient des tailles comparables, voire plus grandes que l'échelle dissipative de l'écoulement porteur ou bien qu'elles soient associées à de grands nombres de Reynolds. Dans ce cas, leur interaction avec le fluide ne peut plus se calculer de manière explicite car elle peut impliquer, par exemple, le développement d'un sillage turbulent (voir Fig. 2(c)). Dans les applications, on a alors recours à modéliser leur mouvement en utilisant des lois essentiellement empiriques (voir, par exemple, [CGW78]). Généralement de telles lois sont obtenues en considérant une particule fixe dans un écoulement amont laminaire et n'interagissant qu'à travers le sillage turbulent qu'elle crée.   tendre cette approche au cas où la particule est suspendue dans un écoulement dans un état turbulent homogène développé maintenu par une source externe d'énergie reste un véritable défi.

De la microphysique des nuages à la création des planètes

Un premier exemple où interviennent des particules lourdes est lors de la croissance par condensation et coalescence des gouttelettes d'eau qui forment les nuages chauds (voir Fig. 3(a)). Les taux de collisions entre gouttelettes sont fortement accélérés par leur transport inertiel par la turbulence de l'air dans le nuage. Deux mécanismes responsables de cet effet ont récemment été identifiés. Le premier est dû à la présence des très fortes inhomogénéités qui apparaissent dans la distribution des particules par concentration préférentielle [RC00, WWY00]. Le second mécanisme est la formation de caustiques (phénomène aussi appelé « effet fronde »), qui assure que deux particules ont une probabilité finie d'être arbitrairement proches avec de grandes différences de vitesse [FFS02, BCCM05, WMV06]. Quantifier ces effets est indispensable à l'amélioration des noyaux de collisions utilisés dans les modèles cinétiques (voir, par exemple [DFT08, XWG08]).

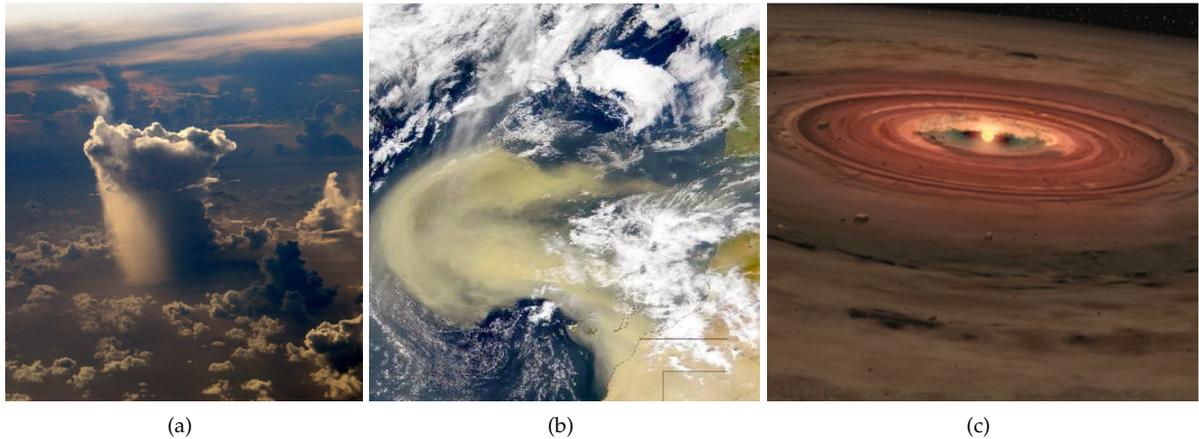


FIGURE 3 – Exemples de situations naturelles où des particules lourdes sont transportées par un écoulement turbulent. (a) Vue d'avion d'un nuage chaud en précipitation. (b) Vue satellite d'une tempête de sable au dessus des îles Canaries (©SeaWiFS Satellite 26/02/2000). (c) Vue d'artiste d'un disque d'accrétion autour d'une jeune étoile (©David Darling).

La poussière en suspension dans l'atmosphère est aussi généralement modélisée par des particules lourdes. Un enjeu important est de comprendre le rôle que jouent de tels aérosols sur le climat. Il est clair qu'ils impliquent un effet direct de refroidissement puisqu'ils réfléchissent une partie de la lumière émanant du Soleil et réduisent ainsi la radiation solaire qui atteint la surface de la Terre (voir Fig. 3(b)). Modéliser leur impact sur le climat nécessite donc de bien estimer leur temps de résidence dans l'atmosphère et donc de mieux comprendre leur déposition (sèche ou humide) et leur éventuelle re-suspension. Pour la déposition sèche, l'approximation de particule ponctuelle peut être utilisée pour estimer les vitesses de sédimentation d'aérosols en fonction de leur taille. Leur déposition humide est généralement plus efficace. Elle a lieu lorsque le dépôt des aérosols est dû à la pluie. Estimer son efficacité nécessite de comprendre les interactions dynamiques entre les petites particules et les gouttes de pluie. Ces dernières ne peuvent généralement pas être approchées par des particules ponctuelles du fait de leur taille importante et d'une vitesse de sédimentation trop importante. Une compréhension détaillée des effets de taille est indispensable pour l'amélioration des modèles existants.

Les aérosols ont un effet indirect sur le climat : vu qu'ils jouent le rôle de noyaux sur lesquels la vapeur d'eau se condense pour former des nuages, les propriétés de ces derniers sont très sensibles à la concentration d'aérosols. Notamment, un premier effet indirect est qu'un plus grand nombre d'aérosols augmente le nombre de gouttelettes et donc la réflectivité des nuages. Toutefois ce mécanisme refroidissant peut être compensé par un second effet indirect récemment introduit dans [LD02] qui se matérialise par un plus grand élargissement du spectre de taille des gouttelettes qui lui même diminue la réflectivité. Négliger ce mécanisme pourrait avoir pour conséquence de surestimer l'effet refroidissant des aérosols.

Un autre champ d'application important des particules inertielles est la formation des planètes dans le système solaire (voir, par exemple [dL01]). Après l'effondrement gravitationnel il y a 4,5 milliards d'années d'une nébuleuse gazeuse, la proto-étoile qui apparaît en son centre se refroidit brutalement, ce qui conduit à la solidification d'une partie du gaz et à l'apparition de poussière. La rotation différentielle du nuage conduit le gaz et la poussière à se concentrer sur un disque parallèle au plan équatorial de l'étoile, le disque protoplanétaire (voir Fig. 3(c)). Les grains microscopiques ont une dynamique de particules inertielles suspendues dans l'écoulement turbulent du gaz [Wei77]. Leur concentration favorise alors leur accrétion par gravitation et conduit à la formation des planétésimaux, petits corps

dont les tailles varient de quelques centaines de mètres à quelques kilomètres. Les mécanismes physiques intervenant dans ces stades de la formation planétaire sont encore très mal compris ; il est notamment difficile d'obtenir une estimation précise des échelles de temps caractéristiques de la formation des planétésimaux. Une raison essentielle est que cette étape importante de la formation des planètes implique différents mécanismes selon que l'écoulement du gaz dans le disque protoplanétaire est laminaire ou turbulent. Dans le premier cas, la dynamique des particules est propice à des instabilités gravitationnelles où apparaissent des planétésimaux. Dans le second cas, il semble que ces instabilités soient inhibées, la turbulence empêchant la sédimentation des particules, et donc l'apparition de régions où la densité locale est suffisamment élevée. Toutefois, d'autres mécanismes peuvent conduire à l'apparition de très fortes inhomogénéités. Par exemple, la concentration préférentielle des particules due à leur inertie, mais aussi leur migration vers le centre des tourbillons anticycloniques du disque de gaz, ou encore leurs interactions gravitationnelles avec d'autres objets massifs. La pertinence des instabilités gravitationnelles dans ce processus est de ce fait toujours débattue.

Organisation du mémoire

Les travaux décrits dans ce mémoire portent sur l'étude de la dynamique de particules dans des écoulements turbulents. Ils sont regroupés selon quatre Chapitres. Le premier est dédié aux propriétés de concentration de particules dotées d'inertie aux échelles dissipatives et inertielles d'un écoulement turbulent incompressible. Nous verrons notamment que des aspects importants de ces concentrations peuvent être compris et reproduits grâce à l'étude de modèles aléatoires. Dans le deuxième Chapitre, nous nous intéresserons aux propriétés dynamiques d'une particule suspendue dans un écoulement turbulent, avec en particulier l'idée de comprendre les différences auxquelles on peut s'attendre entre particules plus petites que la plus petite échelle active de l'écoulement et particules plus grosses. Le troisième Chapitre est dédié à l'étude des différences de vitesse entre petites particules inertielles et de la relation entre leurs statistiques et les taux de collision. Le quatrième Chapitre porte sur l'étude de la dispersion relative de traceurs ou de particules inertielles dans un écoulement turbulent, une question d'importance non seulement dans les applications où le mélange turbulent joue un rôle clef, mais aussi dans l'étude fondamentale de la dynamique et la structure des écoulements turbulents. Finalement, pour conclure ce mémoire, nous verrons comment toutes ces questions peuvent avoir des implications concrètes importantes dans différents problèmes que l'on rencontre en physique de l'atmosphère et pour lesquelles les fluctuations induites par le transport turbulent sont cruciales.

Chapitre 1

Concentrations préférentielles de particules inertielles dans les écoulements turbulents

Au cours des quinze dernières années, d'importants progrès ont été effectués dans la compréhension du transport turbulent de traceurs passifs. Une collaboration internationale a conduit à une description unifiée de leurs propriétés de mélange, d'étirement et de diffusion. Le groupe de l'Observatoire de la Côte d'Azur y a contribué de manière significative à travers des simulations numériques de grandes tailles et l'utilisation d'outils théoriques empruntés à la physique statistique et à la théorie des champs [FGV01]. Un résultat central fut l'observation de lois d'échelle anormales (non prédictibles par analyse dimensionnelle) dans la distribution de traceurs ; il a été montré que cette intermittence est due à la présence de falaises, à travers lesquelles le champ scalaire subit de très fortes variations sur de toutes petites échelles spatiales. Des événements encore plus violents ont lieu lorsque la dynamique est compressible : la distribution du traceur a alors une structure multifractale.

Pour des petites impuretés (des poussières, des gouttelettes ou des bulles) dont la dynamique ne peut se réduire à celle de traceurs, j'ai montré la présence de concentrations fractales, même lorsque l'écoulement est incompressible [Bec03]. De telles particules ont une taille finie et une densité différente du fluide qui les transporte. La description de leur mouvement doit donc prendre en compte leur inertie, d'où leur nom de particules inertielles. Du fait de leur masse, de telles particules ont tendance à être éjectées des structures en rotation de l'écoulement (voir Fig. 1.1(a)). De plus, vu qu'elles interagissent avec le fluide à travers un frottement visqueux, leur dynamique a du retard sur celle du fluide et ne conserve pas les volumes. Aux temps longs, les particules se concentrent sur des ensembles singuliers de l'espace des phases position/vitesse qui évoluent avec la dynamique. La position des particules est obtenue par projection de ces attracteurs dynamiques sur le sous-espace des positions. Elle comporte ainsi de très fortes inhomogénéités ; ce phénomène est généralement appelé concentration préférentielle.

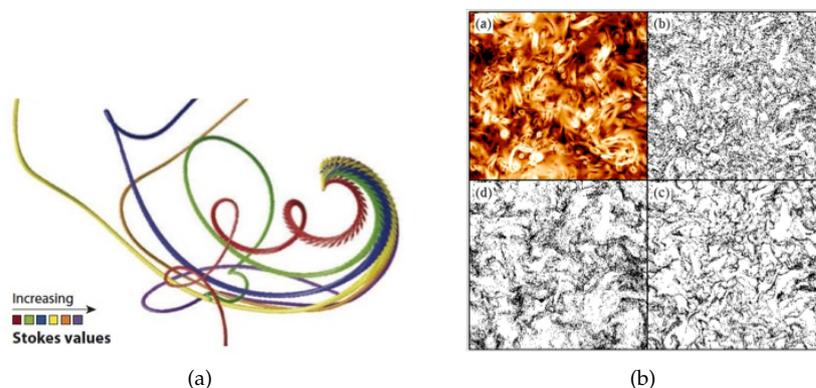


FIGURE 1.1 – (a) Séparation des trajectoires de particules avec différents nombres de Stokes lors du passage dans un filament de vortécité ; la trajectoire rouge correspond à un traceur. (b) en haut, à gauche : module de l'accélération du fluide dans une tranche d'un écoulement 3D (zones claires : fortes accélérations, foncées : faibles) ; autres vignettes : instantané de la position de particules dans cette même tranche pour trois valeurs du nombre de Stokes (croissant dans le sens des aiguilles d'une montre).

La section 1.1 de ce chapitre est dédiée aux propriétés de concentration aux échelles dissipatives

de la turbulence. Dans la section 1.1.1, nous introduisons les outils empruntés à l'étude des systèmes dynamiques dissipatifs qui permettent de quantifier de telles concentrations. Aussi, nous y résumons les travaux effectués en collaboration avec K. Gawędzki et P. Horvai, au cours desquels nous avons découvert une formule explicite reliant les propriétés d'échelle de la distribution de masse à la fonction de taux des grandes déviations des exposants de Lyapunov à temps fini [BGH04]. Nous verrons ensuite dans la section 1.1.2 que les fluctuations de la distribution spatiale de particules ont des propriétés statistiques qui sont très bien décrites par le formalisme multifractal [Bec05]. La section 1.1.3 est consacrée à l'extension de ce type d'approche au cas de suspensions polydispersées (où les tailles de particules ont une distribution continue).

Toutefois, comme nous le verrons dans la section 1.2, les propriétés de concentration des particules sont très différentes aux échelles inertielles. Nous verrons dans la section 1.2.1 que dans des écoulements aléatoires auto-similaires en espace et dépourvus de corrélation temporelle, les propriétés de la distribution de particules dépendent de leur inertie à travers un nombre de Stokes local, défini en adimensionnant le temps de réponse des particules par le temps de retournement associé à l'échelle d'observation [BCH07b]. En revanche, la distribution de masse aux échelles inertielles d'un écoulement turbulent ne suit pas la même physique. En collaboration avec L. Biferale, M. Cencini, A. Lanotte, S. Musacchio et F. Toschi de Rome, nous avons effectué des simulations numériques directes de particules lourdes dans des écoulements turbulents homogènes isotropes [BBC⁺07]. Comme nous le verrons dans la section 1.2.2, nous avons alors montré que l'échelle de temps quantifiant l'effet de l'inertie n'est pas le temps de retournement à l'échelle d'observation mais plutôt un taux de contraction local de la dynamique des particules qui fait intervenir le champ d'accélération de l'écoulement (voir Fig. 1.1(b)). Nous verrons dans la section 1.2.3 que les mécanismes sous-jacents sont bien reproduits par un modèle simple pour la dynamique de la masse de particules [BC07]. Son traitement analytique permet alors d'exprimer les queues de la distribution de masse en fonction des paramètres du modèle. Aussi nous verrons la relation entre cette approche et les problèmes de diffusion dans un milieu aléatoire fluctuant [KBB12]. Finalement, dans la section 1.2.4, nous verrons quel est le pendant des résultats obtenus en turbulence hydrodynamique dans le cas d'un écoulement magnétohydrodynamique [HBFG09].

1.1 Agrégats dynamiques fractals

1.1.1 Transport compressible, dimensions fractales et fluctuations des taux d'étirement

La dynamique de particules à la fois très petites et bien plus lourdes que le fluide peut être approchée par l'équation de Newton

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{X}} &= \mathbf{V}, \\ \dot{\mathbf{V}} &= -\frac{1}{\tau} [\mathbf{V} - \mathbf{u}(\mathbf{X}, t)], \end{cases} \quad (1.1)$$

où les points représentent les dérivées temporelles. $\mathbf{X}(t)$ et $\mathbf{V}(t)$ désignent ici respectivement la position et la vitesse de la particule, $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ est le champ de vitesse du fluide, qui est prescrit et statistiquement stationnaire et τ le temps de réponse des particules. La dynamique des particules a donc lieu dans l'espace des phases positions-vitesses de dimension $2d$, où d est la dimension de l'espace physique. Une inspection rapide du système nous permet de voir que la dynamique est dissipative. Tous les volumes de l'espace des phases sont en effet contractés avec un taux constant donné par la divergence du membre de droite par rapport à (\mathbf{x}, \mathbf{v}) , c'est-à-dire $-d/\tau$.

Si l'on s'intéresse à la densité $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ de particules dans l'espace des phases, un taux de contraction constant implique que celle-ci devient singulière dans le régime statistiquement stationnaire qui est atteint aux temps très longs. Son support, qui est de mesure nulle et est donc généralement un ensemble fractal, est appelé *l'attracteur* de la dynamique. Vu que le champ de vitesse du fluide dépend du temps, cet attracteur évolue lui aussi au cours du temps et attire toutes les trajectoires de particules. Les propriétés statistiques de l'attracteur sont quant à elles stationnaires et on les décrit généralement à l'aide du formalisme multifractal (voir par exemple [PV87]). Le comportement singulier de la densité f de l'espace des phases signifie que la distribution statistiquement stationnaire de la masse des particules n'est pas absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. Pour la caractériser, on introduit alors la masse moyennée

$$\mu_r(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = \int_{\mathcal{B}_r} d\mathbf{x}' d\mathbf{v}' f(\mathbf{x} + \mathbf{x}', \mathbf{v} + \mathbf{v}'), \quad (1.2)$$

où l'intégrale est effectuée sur la boule de rayon r dans l'espace des phases. Les propriétés statistiques de μ_r sont généralement évaluées le long des trajectoires. On s'intéresse alors aux propriétés d'échelle

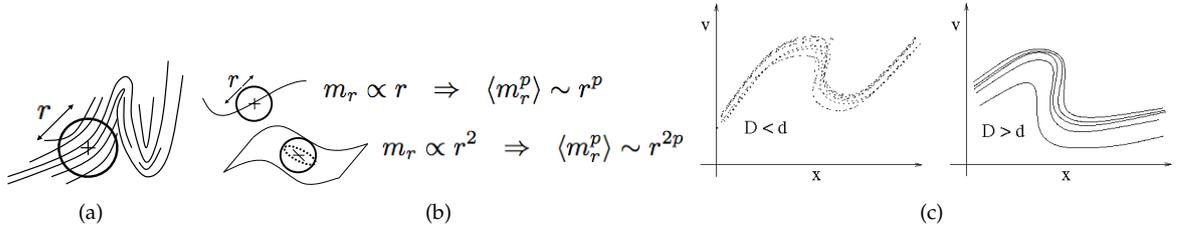


FIGURE 1.2 – (a) La masse quasi-lagrangienne est définie en intégrant la distribution de particules dans une boule centrée sur l'attracteur. (b) Lorsque les trajectoires sont réparties de façon uniforme sur un attracteur de dimension \mathcal{D} , les exposants d'échelle de la masse sont trivialement donnés par $\xi_p = p\mathcal{D}$. (c) La distribution spatiale des particules est obtenue en projetant l'espace des phases de dimension $2d$ sur le sous-espace des positions de dimension d ; selon que la dimension d'origine \mathcal{D} de l'attracteur est plus petite (gauche) ou plus grande (droite) que d , on obtient une distribution spatiale fractale ou bien remplissant tout l'espace.

de la masse quasi-lagrangienne $\bar{\mu}_r(t) = \mu_r(\mathbf{X}(t), \mathbf{V}(t), t)$ (voir Fig. 1.2(a)). On introduit pour cela les moments $\mathcal{M}_p(r) = \langle \bar{\mu}_r^p(t) \rangle$ qui sont indépendants du temps et où la moyenne $\langle \cdot \rangle$ est évaluée sur toutes les trajectoires possibles ayant atteint le régime statistiquement stationnaire. C'est donc une moyenne par rapport à la densité $f(x, v, t)$. Lorsque la dynamique des particules est ergodique, cette moyenne est équivalente à une moyenne temporelle le long d'une trajectoire quelconque. On s'attend en général à ce que les moments de la masse quasi-lagrangienne aient un comportement en loi de puissance lorsque le diamètre r de la boule sur laquelle ils sont calculés tend vers 0, i.e. $\mathcal{M}_p(r) \sim r^{\xi_p}$ pour $r \rightarrow 0$. On voit aisément que les exposants ξ_p permettent de caractériser les propriétés d'échelle de la distribution de masse. Si l'on imagine par exemple que celle-ci est concentrée de façon uniforme sur une ligne dans l'espace des phases, on aura $\xi_p = p$, sur une surface, $\xi_p = 2p$, et plus généralement sur un objet de dimension \mathcal{D} , on aura $\xi_p = p\mathcal{D}$ (voir Fig. 1.2(b)). Toutefois cela n'est vrai que lorsque la masse est distribuée de façon uniforme sur le support de f . En général ce n'est pas le cas, elle y fluctue et plus l'ordre p est élevé, plus le moment $\mathcal{M}_p(r)$ sera sensible aux fortes fluctuations. Dans le cas général, les exposants ne dépendent pas linéairement de leur ordre. Cela signifie en particulier que la distribution de la masse est intermittente et qu'elle présente des queues non gaussiennes. On écrit $\xi_p = p\mathcal{D}_{p+1}$ où les \mathcal{D}_p définissent le spectre de dimension du système [Gra83, HP83]. \mathcal{D}_0 est la dimension fractale (de Hausdorff) du support de la distribution de particules, \mathcal{D}_1 est la dimension d'information de l'attracteur, \mathcal{D}_2 sa dimension de corrélation, etc.

Une connaissance de toutes les dimensions multifractales \mathcal{D}_p permet de caractériser la distribution de masse des particules dans l'espace des phases. En effet, le comportement en loi de puissance des moments de la masse quasi-lagrangienne est équivalent au fait que la dimension locale $h_r = \ln \bar{\mu}_r / \ln r$ suit un principe de grandes déviations de sorte que sa densité de probabilité s'écrit $p(h) \sim e^{(\ln r)\mathcal{S}(h)}$ pour $r \rightarrow 0$. La fonction de taux \mathcal{S} est convexe et positive; elle atteint son minimum égal à 0 en $h = \mathcal{D}_1$. Elle est reliée aux exposants d'échelle ξ_p par une transformation de Legendre, i.e. $\mathcal{S}(h) = \max_p [\xi_p - nh]$. La distribution spatiale des particules est obtenue en projetant leurs positions dans l'espace des phases sur l'espace physique. Cela implique que sous certaines hypothèses d'isotropie de la distribution $f(x, v, t)$, les dimensions fractales $\bar{\mathcal{D}}_p$ dans l'espace physique peuvent s'exprimer en fonction des dimensions de l'espace des phases. On a en effet $\bar{\mathcal{D}}_p = \min(d, \mathcal{D}_p)$ (voir Fig. 1.2c). Comme nous le verrons dans la prochaine section, de telles considérations permettent de prévoir la présence d'un seuil en nombre de Stokes pour la formation d'agrégats fractals de particules inertielles.

La formation d'un attracteur et la convergence de la densité de l'espace des phases vers une mesure multifractale sont généralement expliquées de façon heuristique par l'association de l'étirement et du repliement résultants de la dynamique. Deux ingrédients sont donc indispensables : la chaoticité du système qui implique que deux trajectoires infiniment proches se séparent de façon exponentielle et une dynamique suffisamment mélangeante qui se matérialise par exemple par la présence de conditions de bord. Les propriétés de chaoticité de la dynamique font intervenir la dynamique tangente du système qui régule l'évolution de la séparation infinitésimale $\delta\mathbf{P} = (\delta\mathbf{X}, \delta\mathbf{V})$ entre deux trajectoires dans l'espace des phases. La dynamique tangente s'obtient en linéarisant le système (1.1) le long d'une trajectoire $(\mathbf{X}(t), \mathbf{V}(t))$

$$\begin{cases} \delta\dot{\mathbf{X}} &= \delta\mathbf{V}, \\ \delta\dot{\mathbf{V}} &= -\frac{1}{\tau} [\delta\mathbf{V} - \delta\mathbf{X} \cdot \nabla\mathbf{u}(\mathbf{X}, t)]. \end{cases} \quad (1.3)$$

Ce système linéaire peut formellement s'intégrer en $\delta\mathbf{P}(t) = \mathcal{W}_{t_0,t} \delta\mathbf{P}(t_0)$. La matrice d'évolution $\mathcal{W}_{t_0,t}$ fait bien évidemment intervenir des exponentielles matricielles ordonnées et le gradient du champ de vitesse calculé le long de la trajectoire de référence. La matrice d'inertie $\mathcal{J}_{t_0,t} = \mathcal{W}_{t_0,t}^\top \mathcal{W}_{t_0,t}$ permet de

décrire l'évolution des distances, des surfaces, des volumes infinitésimaux de l'espace des phases. Il s'agit d'une matrice symétrique positive. Elle peut donc se diagonaliser sous la forme

$$\mathcal{J}_{t_0,t} = \mathcal{Q}_{t_0,t}^\top \Lambda_{t_0,t} \mathcal{Q}_{t_0,t}, \text{ où } \Lambda_{t_0,t} = \text{diag} [e^{t\rho_1}, \dots, e^{t\rho_{2d}}]. \quad (1.4)$$

Les exposants $\rho_1(t_0,t) \geq \dots \geq \rho_{2d}(t_0,t)$ sont appelés les taux d'étirement. La contraction à un taux constant de la dynamique dans l'espace des phases implique que pour toutes les trajectoires de référence et à chaque instant, $\rho_1(t) + \dots + \rho_{2d}(t) = -d/\tau$. De plus, lorsque la dynamique est ergodique, le théorème multiplicatif d'Oseledets nous garantit que les taux d'étirement atteignent aux temps longs une limite déterministe (indépendante de la trajectoire le long de laquelle ils sont évalués). On introduit de cette manière les exposants de Lyapunov

$$\lambda_j = \lim_{t \rightarrow \infty} \rho_j(t_0,t) \text{ pour } 1 \leq j \leq 2d. \quad (1.5)$$

Pour cette raison, les taux d'étirement sont aussi souvent appelés les exposants de Lyapunov à temps fini. Ces exposants de Lyapunov permettent de caractériser une grande partie de la dynamique. Leur somme est négative pour les systèmes dissipatifs. Lorsque le plus grand exposant de Lyapunov λ_1 est positif, la dynamique est chaotique. Les directions propres de la matrice unitaire $\mathcal{Q}_{t_0,t}$ tendent elles aussi vers des valeurs finies qui dépendent elles de la trajectoire de référence et du temps. Ces directions sont soit stables, soit instables, selon le signe de l'exposant de Lyapunov auxquelles elles sont associées. Ces directions définissent à leur tour les variétés stables et instables de la dynamique. Il existe des relations entre les exposants de Lyapunov et la distribution de la masse. Si le plus grand exposant de Lyapunov λ_1 est négatif, la distribution de masse est atomique avec des statistiques triviales. Pour $\lambda_1 > 0$, il a été montré dans [LY88] que sous certaines hypothèses assez générales, la dimension d'information \mathcal{D}_1 de l'attracteur est égale à la dimension de Lyapunov $\mathcal{D}_{KY} = j + \delta$ où j et $0 < \delta \leq 1$ sont tels que $\lambda_1 + \dots + \lambda_j + \delta \lambda_{j+1} = 0$. Cette dimension, introduite par Kaplan et Yorke dans [KY79], peut être interprétée de façon heuristique comme la dimension des objets gardant un volume constant durant leur évolution dans l'espace des phases. Comme nous le verrons par la suite, la relation entre la concentration de la masse et l'étirement local de la dynamique va au-delà de cette identité.

La convergence des taux d'étirement vers les exposants de Lyapunov peut s'interpréter comme une conséquence de la loi des grands nombres. Lorsque $t - t_0$ est fini, les déviations par rapport à la limite sont décrites par un principe de grandes déviations qui, lorsque la dynamique est statistiquement stationnaire, s'écrit pour $t \gg t_0$ comme

$$p(\rho_1, \dots, \rho_{2d}; t_0, t) = e^{-(t-t_0)\mathcal{H}(\rho_1, \dots, \rho_{2d})} \theta(\rho_1 - \rho_2) \cdots \theta(\rho_{2d} - \rho_{2d-1}). \quad (1.6)$$

La fonction de taux \mathcal{H} est positive, convexe et elle atteint son minimum (égal à zéro) en $\rho_i = \lambda_i$. Comme cela est montré dans [BGH04], les exposants d'échelle ξ_p de la distribution de la masse peuvent sous certaines hypothèses s'exprimer en fonction de \mathcal{H} .

Avant de faire un résumé de ces travaux, spécifions quelque peu le système auquel nous allons nous intéresser. Considérons non pas des particules inertielles ayant une dynamique définie dans l'espace des phases positions-vitesses mais des traceurs dans un écoulement compressible. Leur dynamique est donnée par

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{v}(\mathbf{X}, t), \quad (1.7)$$

où le champ de vitesse \mathbf{v} est de nouveau prescrit. Cette simplification de la dynamique est notamment justifiée pour les particules inertielles dans la limite des petits nombre de Stokes. En effet, lorsque le temps de réponse τ des particules est bien plus petit que les échelles temporelles de variation du champ de vitesse \mathbf{u} du fluide, leur dynamique peut être approchée par celle de traceurs dans un écoulement compressible synthétique [Max87]. L'équation (1.1) peut alors être approchée par

$$\dot{\mathbf{X}} \approx \mathbf{v}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) - \tau [\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}](\mathbf{X}, t). \quad (1.8)$$

Une distribution typique de particules dans un écoulement compressible aléatoire est montrée sur la Fig. 1.3(a).

Pour relier la distribution de masse dans des petites boules aux fluctuations des taux d'étirement, plaçons-nous de surcroît dans le cas bidimensionnel ($d = 2$). On s'attend à ce que la mesure statistiquement stationnaire $\rho_* = \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \int f(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}$ qui décrit la distribution de masse soit de type SRB (Sinai–Ruelle–Bowen, voir par exemple [You02]). Cela signifie que cette mesure est localement absolument continue (admet une densité finie) dans la direction des variétés instables de la dynamique. Ceci nous conduit à considérer des petits parallélogrammes, centrés sur une trajectoire et dont l'un des côtés,

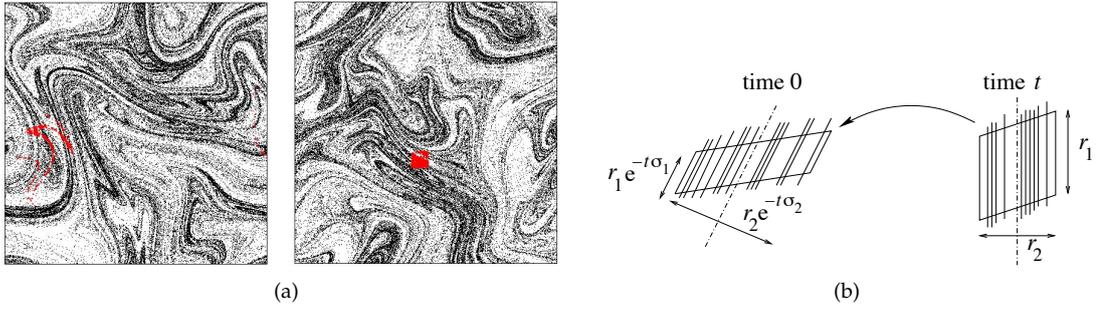


FIGURE 1.3 – (a) Instantané à deux instants successifs de la distribution de traceurs dans un écoulement aléatoire compressible bidimensionnel. La pré-image du petit carré rouge apparaît étirée sur l'image de gauche. (b) Schéma de l'évolution à rebrousse-temps entre les instants t et 0 d'un petit parallélogramme de longueur r_1 dans la direction de la variété instable et r_2 dans la direction perpendiculaire à celle-ci. σ_1 et σ_2 représentent ici les taux d'étirement.

de longueur r_1 , est parallèle à la variété instable et l'autre, de longueur r_2 , est dans la direction perpendiculaire à celle-ci. Nous nous attendons à ce que les moments de la masse quasi-lagrangienne $\bar{\mu}_{r_1, r_2}$ dans de telles parallélogrammes s'écrivent

$$\langle \bar{\mu}_{r_1, r_2}^p \rangle \sim r_1^p r_2^{\xi_p - p} \quad (1.9)$$

pour r_1 et r_2 petits, tant que $\xi_p - p \geq 0$. Lorsque $\xi_p < p$, ces propriétés d'échelle deviennent pour $r_2 > r_1$

$$\langle \bar{\mu}_{r_1, r_2}^p \rangle \sim r_1^{\xi_p} r_2^0. \quad (1.10)$$

Ceci peut être vu comme l'étirement dans une direction donnée d'un ensemble fractal de dimension \mathcal{D} , tout en le contractant dans l'autre direction. Dans la direction d'étirement, l'ensemble se comporte comme s'il était projeté sur une ligne, de telle sorte que sa dimension est $\min(1, \mathcal{D})$. Dans l'autre direction, il aura la dimension complémentaire $\mathcal{D} - \min(1, \mathcal{D}) = \max(\mathcal{D} - 1, 0)$.

Considérons un tel parallélogramme à l'instant $t > 0$ et regardons sa pré-image à l'instant 0 . Alors que la direction parallèle à la variété instable se contracte à rebrousse-temps de façon exponentielle avec un taux donné par le plus grand taux d'étirement ρ_1 , l'autre direction s'allonge avec un taux exponentiel donné par ρ_2 . Ainsi, la pré-image à l'instant 0 du parallélogramme est approximativement un autre parallélogramme comme cela est illustré sur la Fig. 1.3(b). La conservation de la masse et la stationnarité des statistiques conduisent à écrire

$$\langle \bar{\mu}_{r_1, r_2}^p \rangle \approx \langle \bar{\mu}_{r_1 e^{-t\rho_1}, r_2 e^{-t\rho_2}}^p \rangle. \quad (1.11)$$

Lorsque la perte de mémoire de la dynamique lagrangienne est suffisamment rapide (i.e. si la mesure invariante est suffisamment mélangeante), la moyenne dans le membre de droite peut se factoriser aux temps t longs (une telle factorisation est vérifiée dans le modèle de Kraichnan décrit plus bas). Dans une telle situation, on peut alors utiliser la forme de grandes déviations (1.6) pour la distribution des taux d'étirement pour écrire

$$\langle \bar{\mu}_{r_1, r_2}^p \rangle \sim \int_{\rho_1 \geq \rho_2} \langle \bar{\mu}_{r_1 e^{-t\rho_1}, r_2 e^{-t\rho_2}}^p \rangle e^{-t\mathcal{H}(\rho_1, \rho_2)} d\rho_1 d\rho_2. \quad (1.12)$$

Pour être consistante avec la loi d'échelle (1.9) cette relation implique que

$$1 \sim \int_{\rho_1 \geq \rho_2} e^{-t[n\rho_1 + (\xi_p - n)\rho_2 + \mathcal{H}(\rho_1, \rho_2)]} d\rho_1 d\rho_2. \quad (1.13)$$

Vu que le temps t est supposé très grand, une approximation point-selle donne la relation suivante entre les exposants d'échelle ξ_p et la fonction de taux \mathcal{H} des taux d'étirement :

$$\min_{\rho_1 \geq \rho_2} [p\rho_1 + (\xi_p - p)\rho_2 + \mathcal{H}(\rho_1, \rho_2)] = 0. \quad (1.14)$$

De façon alternative, cette relation se formule

$$\xi_p = p - \max_{\substack{\rho_1 \geq \rho_2 \\ \rho_2 < 0}} \frac{1}{\rho_2} [p\rho_1 + \mathcal{H}(\rho_1, \rho_2)] = \min_{h \geq 0} [hp + \mathcal{S}(h)], \quad \text{avec } \mathcal{S}(h) = \min_{\rho > 0} \rho^{-1} \mathcal{H}((h-1)\rho, -\rho). \quad (1.15)$$

Ces formules sont valables pour $\xi_p \geq p$. Pour $\xi_p \leq p$, on obtient de façon similaire à partir de (1.10)

$$\xi_p = - \max_{\substack{\rho_1 \geq \rho_2 \\ \rho_1 < 0}} \frac{1}{\rho_1} H(\rho_1, \rho_2). \quad (1.16)$$

On peut aisément vérifier à partir de (1.14) que $\mathcal{D}_1 = (d\xi_p/dp)|_{p=0} = 1 - \lambda_1/\lambda_2$. Ceci coïncide avec la formule pour la dimension de Lyapunov dans le cas bidimensionnel. On a donc bien $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_{KY}$. Les relations (1.14) et (1.16) peuvent être généralisées aux dimensions plus grandes que deux en utilisant des arguments similaires. Cela est trivial lorsqu'un seul exposant de Lyapunov est positif et tous les autres sont négatifs. Dans le cas général, il faut considérer séparément les différents cas.

Pour illustrer les propriétés à petite échelles de la distribution de masse, nous appliquons maintenant les résultats de cette approche au cas du transport par un champ de vitesse aléatoire compressible choisi dans le cadre du modèle de Kraichnan [Kra68]. Nous nous plaçons pour cela dans un domaine spatial périodique. La vitesse v est choisie de moyenne nulle, avec une distribution gaussienne dont la covariance est

$$\langle v^i(\mathbf{x} + \boldsymbol{\ell}, t + \tau) v^j(\mathbf{x}, t) \rangle = 2(D_0 \delta^{ij} - d^{ij}(\boldsymbol{\ell})) \delta(\tau). \quad (1.17)$$

Aux petites séparations $\boldsymbol{\ell}$, la fonction d^{ij} satisfait

$$d^{ij}(\boldsymbol{\ell}) = \frac{D_1}{2} [(d+1-2\wp) \delta^{ij} \ell^2 + 2(\wp d - 1) \ell^i \ell^j + o(\ell^2)], \quad (1.18)$$

ce qui garantit l'isotropie locale. Le paramètre $0 \leq \wp \leq 1$ est appelé le degré de compressibilité. Ses valeurs extrêmes correspondent respectivement à des champs incompressibles ou potentiels. Pour de tels écoulements, la fonction de taux \mathcal{H} des taux d'étirement est connue de façon explicite [BF99]. Elle s'écrit

$$H = \frac{1}{C_1} \left[\sum_{i=1}^d (\sigma_i - \lambda_i)^2 + C_2 \left(\sum_{i=1}^d (\sigma_i - \lambda_i) \right)^2 \right], \quad (1.19)$$

où $C_1 \equiv 4D_1(d + \wp(d-2))$ et $C_2 \equiv (1 - \wp d)/(\wp(d-1)(d+2))$. Les exposants de Lyapunov sont $\lambda_j = D_1[d(d-2j+1) - 2\wp(d+(d-2)j)]$. Dans le cas bidimensionnel, le plus grand exposant de Lyapunov est positif dès que $\wp > 1/2$. Lorsque $\wp < 1/2$, les exposants de la distribution de masse obtenus par (1.14) et (1.16) s'écrivent

$$\xi_p = \begin{cases} \frac{2p + \sqrt{(1+2\wp)^2 - 8\wp p}}{1+2\wp} - 1 & \text{pour } np \leq n_{\text{cr}}, \\ \xi_{\infty} & \text{pour } p \geq p_{\text{cr}}. \end{cases} \quad (1.20)$$

Dans ces expressions, l'ordre critique p_{cr} et l'exposant de saturation ξ_{∞} sont donnés par

$$\begin{cases} p_{\text{cr}} = \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{1}{2\wp}} \\ \xi_{\infty} = 2n_{\text{cr}} - 1 \end{cases} \quad \text{pour } 0 < \wp \leq 1/6, \\ p_{\text{cr}} = \xi_{\infty} = \xi_1 = \frac{2-4\wp}{1+2\wp} \quad \text{pour } 1/6 \leq \wp < \frac{1}{2}.$$

Ces deux comportements différents sont illustrés sur les Fig. 1.4(a) et (b). Dans les deux cas, les événements correspondant à la saturation sont ceux pour lesquels une masse de l'ordre de la masse totale est concentrée dans la boule de rayon r . Des simulations numériques confirment les valeurs des exposants obtenues explicitement pour le modèle de Kraichnan compressible. Pour différencier les deux cas, deux valeurs de la compressibilité ont été étudiées : $\wp = 1/10 < 1/6$ et $\wp = 3/10 > 1/6$. Les exposants obtenus numériquement après une moyenne sur 10^5 temps de retournement et pour $N = 10^5$ traceurs sont représentés sur les Fig. 1.4(c) et (d). Bien que la convergence statistique soit assez lente, ces simulations coûteuses montrent un assez bon accord avec la théorie, et en particulier la saturation des ξ_p après l'ordre critique.

Pour conclure, mentionnons que pour les ordres p entiers, l'exposant ξ_p pour le modèle de Kraichnan peut être relié au degré d'homogénéité des fonctions de corrélation à un temps de la densité $f(\mathbf{x}, t)$. On a en effet

$$\langle \bar{\mu}_r^p \rangle = \int_{\mathcal{B}_r(\mathbf{0}) \times \dots \times \mathcal{B}_r(\mathbf{0})} \mathcal{F}_{p+1}(\mathbf{0}, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) d\mathbf{x}_1 \dots d\mathbf{x}_n, \quad \text{où } \mathcal{F}_{p+1} \equiv \langle f(\mathbf{0}) f(\mathbf{x}_1) \dots f(\mathbf{x}_p) \rangle \quad (1.21)$$

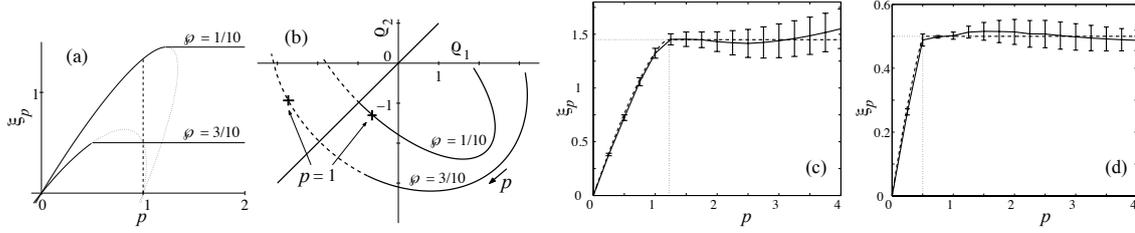


FIGURE 1.4 – (a) Ellipses dans le plan (n, ξ_n) associées au minimum non-contraint dans l'équation (1.14). Les parties pointillées correspondent aux situations où soit le minimum est atteint pour $\rho_1 < \rho_2$ ou bien $\xi_p < p$. Deux valeurs de φ sont représentées pour illustrer le cas $\varphi < 1/6$ et $\varphi > 1/6$. (b) Position où le minimum est atteint dans le plan (ρ_1, ρ_2) . (c) et (d) Exposants ξ_p de la masse dans le champ de vitesse du modèle de Kraichnan pour deux valeurs de la compressibilité $\varphi = 1/10$ (c) et $\varphi = 3/10$ (d). Dans les deux cas les exposants sont en accord avec ceux prédits par la théorie qui sont représentés par une ligne discontinue.

Dans le régime stationnaire du modèle de Kraichnan, la corrélation à $(p + 1)$ points \mathcal{F}_{p+1} de la densité est un mode zéro de l'opérateur

$$M_{n+1}^\dagger \equiv \sum_{0 \leq k, \ell \leq n} \partial_{x_k^i} \partial_{x_\ell^j} [(D_0 \delta^{ij} - d^{ij}(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_\ell)) \cdot] \quad (1.22)$$

Nous n'avons pas besoin d'écrire explicitement ces modes zéro. Le degré d'homogénéité de la solution isotrope d'ordre le plus bas peut être obtenu en imposant seulement la positivité du mode et certaines conditions de positivité et d'intégrabilité. La branche $p < p_{cr}$ dans la formule (1.20) est obtenue en imposant que la solution est continue en $\mathbf{x}_1 = \dots = \mathbf{x}_n$. Sur ce sous-espace, M_{n+1}^\dagger est dégénéré, ce qui permet notamment à des points colinéaires de rester colinéaires lorsqu'ils sont transportés par le flot linéarisé. De plus, si nous restreignons M_{n+1}^\dagger aux secteurs invariants par rotation, cet opérateur devient un opérateur différentiel homogène du second ordre. Il a deux solutions invariantes d'échelle. L'une d'elles est associée à l'exposant $\xi_p - pd$ et donne, par (1.21) la branche non-saturée ($p < p_{cr}$) de (1.20). Une telle solution n'existe plus lorsque le mode zéro qui lui est associé n'est plus intégrable en $\mathbf{x}_i = 0$. Ceci peut se produire si la restriction du mode zéro au secteur colinéaire n'est plus intégrable en 0, c'est-à-dire pour $\xi_p - pd \leq -1$. Cela donne p_{cr} et ξ_∞ dans le cas où $\varphi < 1/6$. Un autre scénario a lieu lorsque le mode zéro a une singularité non-intégrable au voisinage de la géométrie colinéaire. Cela donne p_{cr} et ξ_∞ dans le cas où $\varphi > 1/6$.

1.1.2 Distributions multifractales de particules lourdes aux échelles dissipatives

Comme nous l'avons évoqué dans la section précédente, la distribution spatiale de particules inertielles a une nature fractale lorsque l'écoulement porteur est suffisamment régulier (différentiable). Cette distribution est le lieu de fluctuations dont les propriétés statistiques sont très bien décrites par le formalisme multifractal aussi bien dans les écoulements aléatoires [Bec05] que dans les écoulements turbulents homogènes isotropes [CBB⁺06] lorsque l'on s'intéresse aux échelles dissipatives. Ainsi les moments de la densité de particules moyennée sur des petits domaines se comportent avec l'échelle comme des lois de puissance dont les exposants $\xi_p = p \mathcal{D}_{p+1}$ dépendent de façon non triviale de l'ordre p du moment et de l'inertie des particules mesurée par le nombre de Stokes St .

Dans un écoulement incompressible, lorsque le nombre de Stokes tend vers 0, les particules recouvrent la dynamique de simples traceurs. Leur vitesse est donnée par celle du fluide à leur position et elles se distribuent de manière uniforme dans l'écoulement. L'attracteur dans l'espace des phases positions-vitesses est donc donné à l'instant t par le graphe du champ de vitesse $\mathbf{v} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$. On a ainsi $\mathcal{D}_p \rightarrow d$ pour tout p lorsque $St \rightarrow 0$. Par projection, les dimensions de la distribution de particules dans l'espace physique sont elles aussi $\bar{\mathcal{D}}_p = d$. Dans la limite opposée de particules très lourdes $St \rightarrow \infty$, l'inertie devient tellement importante que les particules ne réagissent plus à l'écoulement fluide et ont un mouvement balistique comparable aux molécules d'un gaz parfait. Elles remplissent donc de manière diffuse l'espace des phases positions-vitesses et $\mathcal{D}_p \rightarrow 2d$. Cela implique que dans cette asymptotique, leur distribution est de nouveau uniforme dans l'espace physique et on a donc $\bar{\mathcal{D}}_p \rightarrow d$ pour $St \rightarrow \infty$. Aux nombres de Stokes intermédiaires, les particules forment des agrégats dynamiques fractals dont nous allons décrire les propriétés statistiques. Pour cela nous commençons par considérer des particules transportées par un écoulement aléatoire gaussien généré par la superposition de modes aléatoires décrits par des processus d'Ornstein-Uhlenbeck indépendants. La figure 1.5(a) représente deux instantanés de la position des particules dans le cas bidimensionnel $d = 2$ pour deux

valeurs distinctes du nombre de Stokes dans le même écoulement. On y voit clairement une dépendance non-triviale des propriétés de concentration en fonction de l’inertie des particules. Lorsque le nombre de Stokes est relativement faible, les particules se concentrent sur un objet feuilleté dont la forme est qualitativement assez proche de celle observée pour des traceurs d’un écoulement compressible. Lorsque le nombre de Stokes augmente, une plus grande dispersion s’observe pour les vitesses des particules, ce qui se traduit par une distribution dans l’espace certes inhomogène mais remplissant de façon plus uniforme l’espace. Pour estimer de manière plus quantitative les propriétés de concentration en

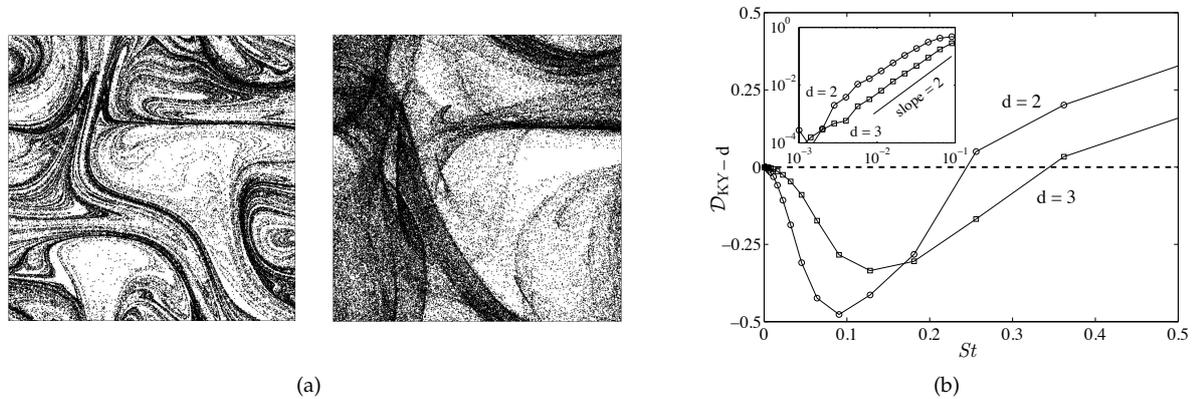


FIGURE 1.5 – (a) Distribution instantanée de particules inertielles ayant deux nombres de Stokes différents ($St = 0.1$ à droite et $St = 2$ à gauche) dans le même écoulement aléatoire bidimensionnel. (b) Dimension de Lyapunov \mathcal{D}_{KY} des particules dans le même écoulement en fonction de leur nombre de Stokes St ; encart : comportement du déficit de dimension $\mathcal{D}_{KY} - d$ en échelles logarithmiques montrant un comportement quadratique au voisinage de $St = 0$ (d’après [Bec03]).

fonction de l’inertie des particules, nous pouvons par exemple mesurer la dimension de Lyapunov \mathcal{D}_{KY} introduite dans la section précédente en fonction du nombre de Stokes. Les résultats sont présentés sur la figure 1.5(b) dans les cas $d = 2$ et $d = 3$, toujours pour des particules dans des écoulements aléatoires gaussiens. Une première observation est que la concentration de particules sur une distribution fractale a systématiquement lieu aux petits nombres de Stokes. La dimension de Lyapunov se comporte comme $\mathcal{D}_{KY} \simeq d - C St^2$ avec $C > 0$. Ce comportement quadratique proche de zéro a été prédit dans [BFF01] en utilisant l’approximation de Maxey [Max87] qui consiste à approcher la dynamique des particules aux faibles nombres de Stokes par celle de traceurs dans un écoulement compressible synthétique. Ce comportement quadratique a aussi été obtenu par [ZA03] avec un modèle de fermeture de l’équation cinétique pour la dynamique de paire de particules. Il a été observé numériquement dans des simulations directes de particules lourdes en turbulence dans [FP04, CKR⁺05]. Une deuxième observation est la présence d’une valeur critique du nombre de Stokes en dessous de laquelle la dimension de l’attracteur est plus petite que d et où les particules forment des agrégats fractals dans l’espace physique et au dessus de laquelle elles remplissent tout l’espace. Les deux régimes correspondant à différentes valeurs de St sont illustrés pour $d = 2$ sur la figure 1.5(a). Lorsque le nombre de Stokes est en dessous de la valeur critique (gauche), les particules se concentrent sur un ensemble fractal et des régions très denses ainsi que des zones quasiment vides apparaissent dans leur distribution. En revanche, pour des nombres de Stokes au dessus du seuil (droite), les particules emplissent tout le domaine, avec toutefois une densité non-uniforme. Ce comportement non-monotone des propriétés de concentration en fonction du nombre de Stokes est responsable de la présence d’une valeur optimale où la dimension fractale de leur distribution atteint un minimum. Cette concentration optimale a lieu pour St de l’ordre de l’unité.

Ce comportement est assez universel, dans le sens où il ne dépend pas qualitativement du type d’écoulement porteur considéré. Pour soutenir cette affirmation, nous rapportons dans cette section les résultats de simulations numériques directes de particules ponctuelles lourdes dans des écoulements en turbulence homogène isotrope. Ces simulations ont été effectuées en intégrant les équations de Navier–Stokes incompressibles par une méthode pseudo-spectrale. Le champ de vitesse est maintenu dans un état turbulent statistiquement stationnaire par un forçage volumique concentré aux grandes échelles. Différentes résolutions ont été étudiées, allant de 64^3 à 2048^3 points de collocation, ce qui correspond à des nombres de Reynolds basés sur la micro-échelle de Taylor allant de $R_\lambda \approx 65$ à 400 . La figure 1.6(c) représente la dimension de Lyapunov de la distribution de particules en fonction de leur nombre de Stokes pour $R_\lambda \approx 185$. On y voit clairement un comportement qualitatif très proche de celui observé dans des écoulements aléatoires. Ces simulations n’ont pas permis de considérer des nombre de Stokes suffisamment petit pour confirmer le comportement quadratique du déficit de dimension lorsque $St \rightarrow 0$. On note toutefois la présence d’un point d’inflexion qui confirme que le comportement n’est pas

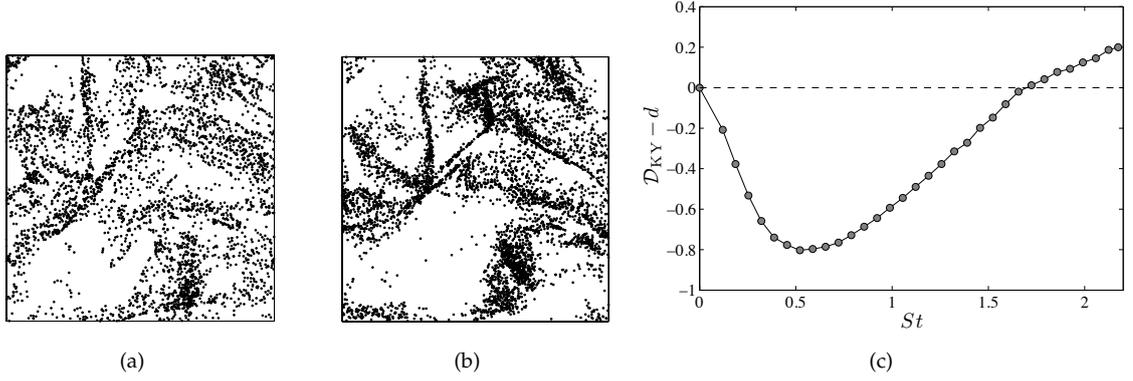


FIGURE 1.6 – (a) et (b) Distribution instantanée de particules inertielles dans une fine tranche de taille $\approx 100\eta \times 100\eta$ pour deux valeurs différentes du nombre de Stokes ($St \approx 0.48$ pour (a) et $St \approx 1.8$ pour (b)) dans un écoulement turbulent tri-dimensionnel à $Re_\lambda \approx 185$. (c) Dimension de Lyapunov \mathcal{D}_{KY} des particules dans le même écoulement en fonction de leur nombre de Stokes St (d’après [BBB⁺06b]).

linéaire. La dimension de Lyapunov atteint un minimum pour $St \approx 0.5$, puis croît de nouveau et excède la dimension de l’espace physique pour $St \gtrsim 1.6$. Les distributions de particules associées aux valeurs en dessous et au dessus de cette valeur critique sont représentées sur les figures 1.6(a) et (b). Il s’agit de la distribution de particules dans une tranche d’épaisseur $\approx \eta$ et de taille $\approx 100\eta \times 100\eta$, où η désigne l’échelle dissipative de Kolmogorov. On a l’impression que les particules associées à un plus grand nombre de Stokes sont bien plus concentrées. Cela est vrai lorsque l’on regarde les grandes échelles. Toutefois, la distribution spatiale des particules aux échelles $\lesssim \eta$ n’a une structure fractale que pour la plus petite valeur de St .

Pour comprendre la nature des fluctuations de la distribution de particules, nous avons aussi mesuré les dimensions fractales d’ordres plus élevés. Une évaluation de ces dimensions généralisées qui est basée sur les statistiques de la masse moyennée sur des boules de rayon r (comme cela est décrit dans la section précédente) nécessite d’avoir une bonne approximation de la distribution de masse à petite échelle. Cela n’est généralement pas le cas dans les simulations numériques directes où le nombre fini de particules est responsable d’effets importants de la discrétisation aux petites échelles. Pour contourner cette difficulté, il est bien plus simple de s’intéresser à la distribution à p points des particules. La probabilité $P_p(r; St)$ d’observer p particules choisies de façon aléatoire sur l’attracteur et se trouvant toutes à une distance plus petite que r les unes des autres se comporte comme $P_p(r; St) \propto r^{(p-1)\bar{D}_p(St)}$ aux petites échelles. Dans le cas $p = 2$, on obtient en effet $dP_2(r)/dr = p_2(r) \propto r^{\bar{D}_2(St)-1}$. Nous utilisons ici cette technique pour évaluer les dimensions fractales de la distribution spatiale de particules inertielles dans nos simulations numériques.

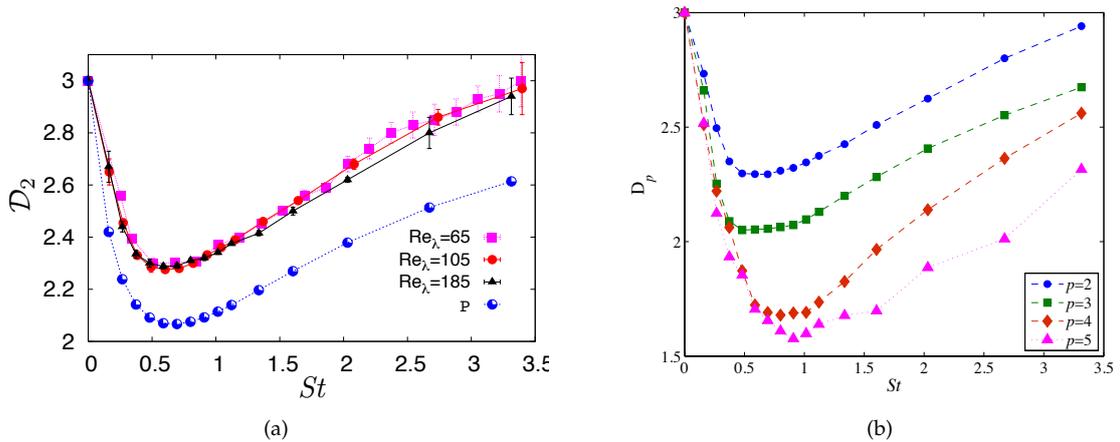


FIGURE 1.7 – (a) Dimension de corrélation \bar{D}_2 en fonction du nombre de Stokes St pour différentes valeurs du nombre de Reynolds de l’écoulement porteur. La quantité P représente (à un facteur près) la probabilité que les particules soient dans une zone de rotation de l’écoulement. (b) Dimensions fractales généralisées $\bar{D}_p(St)$ mesurées pour $Re_\lambda = 185$, en fonction du nombre de Stokes pour les moments d’ordres $p = 2$ à $p = 5$.

La figure 1.7(a) représente la dimension de corrélation de l’espace physique \bar{D}_2 en fonction du nombre de Stokes St pour différentes valeurs du nombre de Reynolds de l’écoulement porteur. On y voit que \bar{D}_2 ne dépend que très faiblement de Re_λ dans les gammes de nombre de Reynolds représentées

ici. Une observation similaire avait été effectuée dans [CK04], où la concentration des particules avait été caractérisée de manière équivalente en termes de la fonction de distribution radiale. Cela signifie que le temps associé à l'échelle de Kolmogorov $\tau_\eta = \sqrt{\nu/\varepsilon}$ qui est utilisé ici pour définir le nombre de Stokes et qui varie de plus d'un facteur deux entre le plus petit et le plus grand nombre de Reynolds est bien le temps pertinent pour caractériser les propriétés de concentration aux échelles plus petites que η . Pour toutes les valeurs de R_λ , un maximum de concentration (minimum de \bar{D}_2) est observé pour $St \approx 0.6$. Pour les valeurs de St plus grandes que celles étudiées ici, on s'attend à ce que \bar{D}_2 sature vers la dimension de l'espace physique $d = 3$. Aux petites valeurs de St , la position des particules est fortement corrélée avec la structure locale de l'écoulement porteur. Une mesure quantitative de cela est donnée sur la figure 1.7(a) où l'on a représenté la probabilité P que les particules se trouvent dans une zone non-hyperbolique de l'écoulement, c'est-à-dire aux positions où la matrice gradient de la vitesse du fluide a deux valeurs propres complexes conjuguées. On remarque que P atteint son minimum pour des valeurs de St proches du minimum de \bar{D}_2 . Cela soutient la thèse traditionnelle qui relie les concentrations de particules à l'éjection des structures tourbillonnaires de l'écoulement porteur.

La figure 1.7(b) représente les dimensions fractales généralisées en fonction du nombre de Stokes pour des particules dans un écoulement turbulent avec $R_\lambda = 185$. Ces statistiques montrent une signature claire de la multifractalité, confirmant les résultats obtenus dans [Bec05] pour des écoulements aléatoires. Une méthode directe pour évaluer les propriétés d'échelle des probabilités $P_p(r)$ consiste à regarder le comportement de leur dérivée logarithmique $(d \ln P_p(r))/(d \ln r)$. Une telle quantité définit une pente locale qui tend en principe vers $(p-1)\bar{D}_p$ lorsque $r/\eta \rightarrow 0$. Pour extraire un exposant d'échelle, on peut choisir de moyennner cette pente locale sur un intervalle où elle est raisonnablement constante ; les barres d'erreur sont alors définies comme les déviations maximales de la pente locale mesurée par rapport à cette moyenne. Nous utilisons ici une stratégie différente. Comme nous le voyons sur la fi-

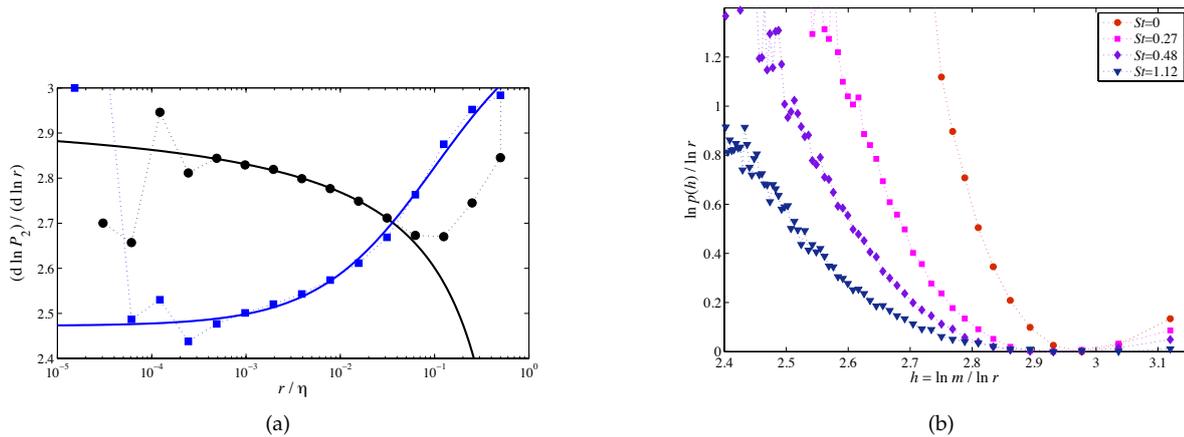


FIGURE 1.8 – (a) Pente locale (dérivée logarithmique) de la probabilité cumulée à deux points $P_2(r; St)$ en fonction de l'échelle pour deux valeurs distinctes du nombre de Stokes (courbe la plus basse en bleu : $St = 0.48$ et la plus haute en noir : $St = 3.31$) ; les deux lignes pleines représentent le fit obtenu en prenant en compte les termes sous-dominants. (b) Fonction de taux de la distribution de masse aux petites échelles pour différents nombres de Stokes comme indiqué.

gure. 1.8(a) pour $p = 2$, il n'y a pas clairement de gamme d'échelles plus grande qu'une fraction de décade où la pente locale obtenue à partir des données numériques est suffisamment constante. Toutefois, la précision statistique est suffisante pour résoudre un comportement lisse et régulier de la pente locale sur plus de deux décades. Utiliser cela nécessite de prendre en compte les termes sous-dominant et d'effectuer l'Ansatz suivant pour le comportement à petite échelle de $P_p(r)$:

$$P_p(r) \approx r^{(p-1)\mathcal{D}_p} [\alpha_0 + \alpha_1 r + \alpha_2 r^2 + \dots] + r^{3(p-1)} [\beta_0 + \beta_1 r + \beta_2 r^2 + \dots], \quad (1.23)$$

Cette décomposition en deux contributions séparées a été proposée dans [BCH07b] dans le cas d'écoulements aléatoires. Le premier terme implique la dimension \mathcal{D}_p dans l'espace des phases complet positions-vitesses. Le second terme vient de la projection depuis cet espace vers celui des positions et a un lien avec le développement de caustiques dans la distribution de particules (de positions spatiales où le champ de vitesse des particules devient singulier par projection). Cet Ansatz suggère que la dimension dans l'espace physique s'écrit $\bar{D}_p = \min(\mathcal{D}_p, 3)$. La forme des termes sous-dominant du premier ordre à une échelle r donnée dépend très fortement des valeurs des coefficients α_i et β_i . Aux petites valeurs du nombre de Stokes, on a $\mathcal{D}_p < 3$ alors que les β_i sont très proches de 0. Ceci est lié aux propriétés

de concentration des particules et à une très faible probabilité d’observer des caustiques. On s’attend en effet à ce que cette dernière soit de l’ordre de $\propto \exp(-c/St)$ (voir [WM05]). Aux nombres de Stokes plus grands, les caustiques donnent la contribution sous-dominante principale. Ainsi deux fits différents pour la probabilité à p points doivent être considérés

$$\begin{aligned} P_p(r) &\approx \alpha_0 r^{(p-1)\mathcal{D}_p} + \alpha_1 r^{(p-1)\mathcal{D}_p+1} \quad \text{pour } St \leq St_*, \\ P_p(r) &\approx \alpha_0 r^{(p-1)\mathcal{D}_p} + \beta_0 r^{3(p-1)} \quad \text{pour } St \geq St_*, \end{aligned} \quad (1.24)$$

où St_* correspond approximativement à la valeur du nombre de Stokes pour laquelle le minimum de la dimension $\bar{\mathcal{D}}_p$ est atteint et pour laquelle la concentration à petite échelle est maximale. En appliquant ces considérations à la dérivée logarithmique, de telles formes permettent d’approcher les données en utilisant un fit avec deux paramètres (\mathcal{D}_p et le rapport entre les deux constantes) sur plus de deux décades, comme cela est vu sur la Fig. 1.8(a).

Les dimensions fractales obtenues par cette technique de mesure sont représentées sur la Fig. 1.7(b). Elles montrent des comportements assez différents selon que le nombre de Stokes soit petit ou modéré. À gauche du minimum, les dimensions \mathcal{D}_p semblent saturer assez rapidement vers une limite finie \mathcal{D}_∞ lorsque l’ordre p augmente. La saturation est bien plus lente aux valeurs plus grandes du nombre de Stokes. Ceci suggère que des particules ayant des nombres de Stokes différents associés à la même valeur de \mathcal{D}_2 à droite et à gauche du minimum puissent avoir des fluctuations de natures très différentes de leur masse à la même échelle. De telles considérations peuvent être très importantes lorsque l’on évalue les taux de collision instantanés. Ce phénomène peut se remarquer sur la Fig. 1.8(b) qui représente la fonction de taux de la masse définie dans la section précédente $S(h) = \ln p(h) / \ln r$ où $h = \ln m_r / \ln r$ est la dimension locale. Cette fonction atteint son minimum pour $h = \mathcal{D}_1$ et on voit clairement que lorsque l’on augmente le nombre de Stokes même si les courbes ne changent pas de façon notable au voisinage de leur minimum, elles dévient très fortement les unes des autres pour $h \ll \mathcal{D}_1$.

1.1.3 Cas des suspensions polydispersées

Dans les sections précédentes, nous nous sommes limités à l’étude des propriétés de concentration de particules ayant toutes le même nombre de Stokes, et donc la même taille. Dans la plupart des applications, les particules n’ont pas toutes la même taille mais présente une certaine dispersion. Le but de cette section est de comprendre dans quelle mesure les propriétés de concentration de particules monodispersées sont pertinentes pour décrire les concentrations réelles.

Pour cela, considérons les équations régissant le mouvement relatif de deux particules associées à deux nombres de Stokes St_1 et St_2 . Leur séparation \mathbf{R} et leur vitesse relative \mathbf{W} évoluent suivant

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt} = \mathbf{W}, \quad \frac{d\mathbf{W}}{dt} = \frac{1}{\tau} \frac{\Delta \mathbf{u} - \mathbf{W}}{1 - \theta^2/4} - \frac{\theta}{\tau} \frac{\bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{V}}}{1 - \theta^2/4}, \quad (1.25)$$

où $\bar{\mathbf{u}} = (\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2)/2$, $\Delta \mathbf{u} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$ et $\bar{\mathbf{V}} = (\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2)/2$. Ici et dans ce qui suit, $\tau = (\tau_1 + \tau_2)/2$, $St = (St_1 + St_2)/2$ et $\theta = (\tau_1 - \tau_2)/\tau = \Delta St / St$. Les deux termes du membre de droite de (1.25) sont associés à deux effets différents. Le premier correspond à la relaxation de la vitesse relative vers la différence de vitesse du fluide. Le second est proportionnel à la différence en nombre de Stokes et s’annule donc pour des particules de même taille. L’échelle spatiale caractéristique $r_* = \eta |\theta|$ permet de distinguer deux régimes. Lorsque $R = |\mathbf{R}| > r_*$, la différence de vitesse entre particules a une dynamique de relaxation vers la différence de vitesse du fluide $|\Delta \mathbf{u}| \sim R$, tandis que pour $R < r_*$, sa dynamique est donnée par le terme venant de la différence en temps de réponse des particules. En conséquence, pour $R < r_*$, le mouvement entre les deux particules est décorréolé, alors qu’à des échelles plus grandes que r_* des corrélations apparaissent du fait que les deux particules sont transportées par le même écoulement. Ce mécanisme est illustré sur la Fig. 1.9, qui représente au même instant la position de deux populations de particules caractérisées par différents nombres de Stokes dans un écoulement aléatoire bidimensionnel gaussien. Aux grandes échelles, les deux distributions se ressemblent très fortement, alors qu’un zoom à une échelle de l’ordre de r_* révèle des différences.

Deux cas se distinguent selon la différence relative θ entre les deux nombres de Stokes :

- Pour $|\theta| \ll 1$, on obtient une asymptotique intermédiaire pour $r_* \ll r \ll \eta$ où la séparation entre particules est gouvernée par le premier terme dans le membre de droite de (1.25). Les propriétés de concentration sont alors décrites par le mouvement à deux points associé au nombre de Stokes moyen St . On retrouve alors les résultats de la section précédente avec $P_2(r) \propto r^{\bar{\mathcal{D}}_2(St)}$. Comme cela est clair sur la Fig. 1.9(b), la situation est différente aux plus petites échelles lorsque $r \ll r_*$. Cette fois, la dérivée temporelle de la différence de vitesse \mathbf{W} ne dépend plus de \mathbf{R} mais seulement de l’accélération différentielle

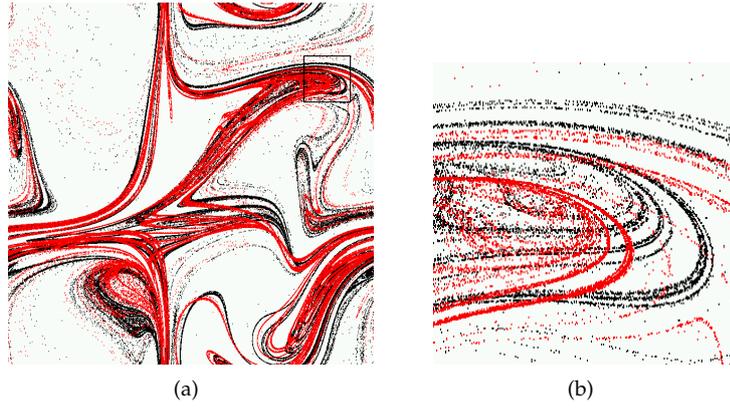


FIGURE 1.9 – (a) Instantané de la position de $N = 4 \times 10^5$ particules associées à deux valeurs différentes du nombre de Stokes ($St = 0.4$ en noir et $St = 0.5$ en rouge) pour l'écoulement aléatoire gaussien bidimensionnel. (b) Zoom de la partie encadrée illustrant les effets induits par la différence en nombre de Stokes. (D'après [BCCM05].)

due à la différence en nombre de Stokes. La translation de l'attracteur qui en résulte dans l'espace des phases implique que la différence de vitesse est indépendante de la séparation. Les particules avec des nombres de Stokes différents se voient à ces échelles comme un gaz moléculaire. On a ainsi $P_2(r) \propto r^d$. La présence d'une échelle caractéristique r_* séparant ces deux régimes est confirmée numériquement dans le cas d'écoulements porteurs turbulents.

- Pour $|\theta| \gtrsim 1$, l'échelle critique r_* est de l'ordre ou plus grande que l'échelle dissipative η et le régime intermédiaire disparaît. Quelle que soit l'échelle $r \ll \eta$, les particules se voient comme si elles étaient distribuées de manière uniforme avec des vitesses indépendantes les unes des autres. La probabilité que deux particules soient à une distance inférieure à r les unes des autres s'écrit alors $P_2(r) \propto r^d$.

Nous verrons dans la section 3.1.2 que ces considérations jouent un rôle important lorsque l'on cherche à modéliser le noyau de collision entre particules de tailles différentes.

1.2 Concentration aux échelles inertielles de la turbulence

Les concentrations multifractales que nous avons étudiées dans la section précédente permettent de décrire les propriétés de la distribution spatiale des particules seulement aux échelles où le champ de vitesse est suffisamment régulier (différentiable), ce qui dans un écoulement turbulent n'a lieu qu'aux échelles dissipatives. Les propriétés de la distribution de masse sont très différentes aux échelles inertielles où le champ de vitesse perd sa régularité et n'est plus que différentiable au sens de Hölder.

1.2.1 Particules dans des écoulements auto-similaires

Pour mieux comprendre cela, commençons par nous intéresser au cas de particules lourdes suspendues dans des écoulements aléatoires auto-similaires en espace et dépourvu de corrélation temporelle [BCH07b]. Comme nous allons maintenant le voir, cela va nous permettre de mettre en évidence le fait que les propriétés de la distribution de particules dépendent de l'inertie des particules à travers un nombre de Stokes local qui est défini en adimensionnant le temps de réponse des particules par le temps de retournement associé à l'échelle d'observation.

Nous nous concentrons ici sur les statistiques du second ordre de la distribution de particules aux échelles inertielles. Elles peuvent être complètement décrite en termes du mouvement relatif de paires de particules. Aux échelles inertielles, deux mécanismes concomitants entrent en jeu : la dynamique dissipative des particules due à leur frottement visqueux avec le fluide et l'éjection des structures tourbillonnaires persistantes de l'écoulement par les forces centrifuges. En modélisant l'écoulement porteur par un écoulement irrégulier et auto-similaire en espace qui est δ -corrélé en temps, on élimine le second effet. L'absence de toute structure persistante dans l'écoulement considéré assure que les forces centrifuges ne jouent aucun rôle. Ce modèle s'inscrit dans l'étude des particules « très lourdes » dont le temps de réponse est bien plus long que le temps de corrélation typique de l'écoulement [BCH07b, FH08].

Le mouvement relatif entre deux particules est décrit par leur séparation \mathbf{R} qui est solution de l'équation

$$\frac{d^2 \mathbf{R}}{dt^2} = -\frac{1}{\tau} \left[\frac{d\mathbf{R}}{dt} - \delta \mathbf{u}(\mathbf{R}, t) \right], \quad (1.26)$$

où $\delta \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t) - \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ est la différence de vitesse du fluide entre les deux positions de particules. Nous supposons que la vitesse \mathbf{u} est un champ gaussien stationnaire, homogène et isotrope avec pour corrélation

$$\langle u_i(\mathbf{x}, t) u_j(\mathbf{x}', t') \rangle = 2D_0 \delta_{ij} - b^{ij}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \delta(t - t'), \quad (1.27)$$

où D_0 est la variance de la vitesse. Pour des écoulements incompressibles, auto-similaires et non-lisses, la fonction b prend la forme

$$b^{ij}(\mathbf{r}) = D_1 r^{2h} [(d - 1 + 2h) \delta_{ij} - 2h r_i r_j / r^2], \quad (1.28)$$

où $r = |\mathbf{r}|$, d est la dimension d'espace, $h \in [0, 1]$ l'exposant de Hölder du champ de vitesse porteur et D_1 une constante mesurant l'intensité de la turbulence. Ce type d'écoulement a été introduit dans [Kra68] pour modéliser le transport turbulent du scalaire passif.

En définissant $s = t/\tau$ et en adimensionnant \mathbf{R} par l'échelle d'observation ℓ , on peut aisément voir que la dynamique ci-dessus, et donc que toutes les propriétés statistiques à une échelle ℓ ne dépendent que du nombre de Stokes local $St(\ell) = D_1 \tau / \ell^{2(1-h)}$. Cette quantité sans dimension, introduite pour la première fois dans [FFS02], est le rapport entre le temps de réponse τ des particules et le temps de retournement à l'échelle ℓ . Elle mesure un effet de l'inertie qui dépend de l'échelle. Aux grandes échelles ($\ell \rightarrow \infty$), l'inertie devient négligeable ($St(\ell) \rightarrow 0$) et les particules retrouvent la dynamique incompressible de traceurs. Au contraire, vu que $St(\ell) \rightarrow \infty$ pour $\ell \rightarrow 0$, les effets de l'inertie deviennent dominants aux petites échelles et la dynamique approche celle de particules libres. Aussi bien pour les petites que pour les grandes valeurs du nombre de Stokes, les particules se distribuent de manière uniforme en espace. Les inhomogénéités importantes apparaissent pour $St(\ell) \approx 1$.

Notons que dans le cas d'écoulements porteurs illimités, la séparation entre deux particules croît de manière indéfinie en temps et donc la dynamique (1.26) n'atteint jamais d'état statistiquement stationnaire. Toutefois, les écoulements turbulents réels sont bornés, ce qui permet d'atteindre un équilibre statistique. Des conditions de bord doivent donc être implémentées dans le modèle considéré en imposant, par exemple, la réflexion de la distance entre les particules à $|\mathbf{R}| = L$. Il est clair que la propriété d'auto-similarité est violée par la présence des bords; les arguments d'échelle présentés ci-dessus ne s'applique donc qu'aux échelles $\ell \ll L$.

Dans le cas d'écoulements différentiables ($h = 1$), il y a une unique échelle de temps de sorte que la dynamique ne dépend que du nombre de Stokes global $St = D_1 \tau$. Comme nous l'avons vu dans les sections précédentes, les inhomogénéités dans la distribution des particules peuvent être quantifiées par $d - \bar{\mathcal{D}}_2$, où $\bar{\mathcal{D}}_2$ est la dimension de corrélation définie par

$$\bar{\mathcal{D}}_2 = \lim_{r \rightarrow 0} d_2(r), \quad \text{avec } d_2(r) = d(\ln P_2(r)) / d(\ln r), \quad (1.29)$$

où $P_2(r)$ désigne la probabilité que $|\mathbf{R}| < r$. Dans les écoulements lisses δ -corrélés en temps, comme dans les suspensions turbulentes, la dimension de corrélation $\bar{\mathcal{D}}_2$ dépend de façon non-triviale du nombre de Stokes [BCH07b].

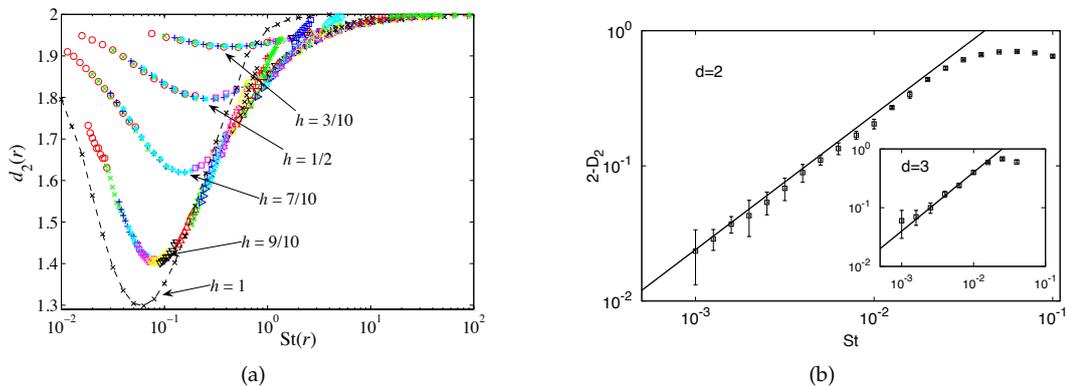


FIGURE 1.10 – (a) Dimension de corrélation locale $d_2(r)$ en fonction du nombre de Stokes local $St(r) = D_1 \tau / r^{2(1-h)}$ pour différentes valeurs de l'exposant de Hölder h en deux dimensions. Différentes couleurs correspondent à différentes valeurs du temps de réponse τ des particules. (b) Déficit de dimension $d - \bar{\mathcal{D}}_2$ en fonction de St pour $d = 2$ dans le cas d'un écoulement lisse ($h = 1$). Encart : idem pour $d = 3$. Les points représentent les résultats numériques et la ligne pleine les prédictions de l'asymptotique $St \ll 1$ données par (1.37) — d'après [BCH08].

Pour les écoulements qui ne sont que continus au sens de Hölder, $\bar{\mathcal{D}}_2 = d$ quelque soit le temps de réponse des particules. Les informations sur les inhomogénéités sont contenues dans la dimension de

corrélation locale $d_2(r)$ définie dans (1.29). D'après les arguments dimensionnels ci-dessus, on s'attend à ce que $d_2(r)$ ne dépende que de h et du nombre de Stokes local $St(r)$ lorsque $r \ll L$. Ceci est confirmé numériquement pour $d = 2$ comme on peut le voir sur la Fig. 1.10(a), qui représente la dimension locale $d_2(r)$ en fonction de $St(r)$. La focalisation des données associées à différents temps de réponse τ montre la dépendance en fonction du nombre de Stokes local. En comparant ce qui est obtenu pour différentes valeurs de l'exposant de Hölder h , on observe que lorsque le fluide devient plus irrégulier, l'intensité de la concentration diminue. En particulier, le minimum de $d_2(r)$ se rapproche de $d = 2$ lorsque h diminue.

Le modèle d'écoulement porteur considéré dans cette section a l'avantage d'induire une dynamique markovienne des particules. En particulier, la gaussianité et la décorrélation temporelle du champ de vitesse du fluide impliquent que la densité de probabilité $p(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t | \mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0, t_0)$ de trouver deux particules à une séparation $\mathbf{R}(t) = \mathbf{r}$ avec une vitesse relative $\dot{\mathbf{R}}(t) = \mathbf{v}$ au temps t , sachant que $\mathbf{R}(t_0) = \mathbf{r}_0$ et $\dot{\mathbf{R}}(t_0) = \mathbf{v}_0$ est une solution de l'équation de Fokker-Planck

$$\partial_i p + \sum_i \left(\partial_r^i - \frac{1}{\tau} \partial_v^i \right) (v^i p) - \sum_{i,j} \frac{b^{ij}(\mathbf{r})}{\tau^2} \partial_v^i \partial_v^j p = 0, \quad (1.30)$$

avec la condition initiale $p(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t_0) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}_0)$. Bien que l'on puisse écrire une équation fermée pour p , il n'a pas été à ce jour possible de la résoudre explicitement, si ce n'est dans le cas $h = 1$ et $d = 1$ [Deu85, WM03, DFT08]. Bien que de tels écoulements soient toujours compressibles, leur étude permet de mieux comprendre qualitativement la dynamique relative des particules en dimension plus grande que un. En particulier, comme nous le verrons dans le chapitre 3, de nombreux résultats unidimensionnels sur la formation des caustiques restent valables dans des écoulements bidimensionnels incompressibles car les fluctuations de vitesse conduisant à la formation de caustiques sont pour l'essentiel unidimensionnelles. La plupart des résultats sur l'équation de Fokker-Planck (3.22) en dimension $d > 1$ ont été obtenus pour $h = 1$ et dans l'asymptotique des petits nombres de Stokes. En effectuant une analogie avec l'approximation WKB en mécanique quantique, Mehlig, Wilkinson et collaborateurs ont construit de manière perturbative les solutions stationnaires de l'équation de Fokker-Planck (voir, par exemple, [MW04, WMÖD07]).

Comme cela est montré dans [BCHT08] et comme nous allons maintenant le voir, il est possible de généraliser cette approche au cas de petites particules évoluant dans des écoulements irréguliers. Au petits nombres de Stokes locaux, les échelles de temps caractéristiques de l'évolution de la vitesse des particules sont bien plus courtes que celles associées à la dynamique de leur séparation. On obtient alors une équation effective pour l'évolution de la séparation entre les particules en effectuant une moyenne par rapport à la variable rapide associée à la différence de vitesse entre les particules. La stratégie mathématique utilisée de manière systématique pour effectuer une telle moyenne a été proposée par [MTVE01] dans le contexte des modèles climatiques stochastiques. Dans ce cas, il est possible d'écrire un développement de l'opérateur de type Fokker-Planck qui apparaît dans l'équation pour la densité de probabilité des variables lentes, c'est-à-dire dans notre cas la séparation R entre les particules. Cette équation peut alors être utilisée pour déterminer la dimension de corrélation locale $d_2(r)$ lorsque $St(r) \ll 1$.

La première étape de cette approximation consiste à supposer que la probabilité jointe $p(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ s'écrit

$$p(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \simeq p(\mathbf{r}) P_r(\mathbf{v}) + \tilde{p}(\mathbf{r}, \mathbf{v}), \quad (1.31)$$

où $\tilde{p}(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ désigne les termes sous-dominants qui sont $\mathcal{O}(St)$; $P_r(\mathbf{v})$ est la distribution stationnaire associée aux variables rapides et satisfait l'équation de Fokker-Planck

$$\hat{L}_0 P_r(\mathbf{v}) \equiv - \left[\frac{1}{\tau} \partial_v^i v^i + \frac{b^{ij}(\mathbf{r})}{\tau^2} \partial_v^i \partial_v^j \right] P_r(\mathbf{v}) = 0, \quad (1.32)$$

avec la condition de normalisation $\int d\mathbf{v} P_r(\mathbf{v}) = 1$. Sans perte de généralité, on suppose que les termes sous-dominants $\tilde{p}(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ dans l'approximation (1.31) ne contribuent pas à la condition de normalisation, de telle sorte que la marginale de la séparation entre les particules s'écrive $\int d\mathbf{v} p(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = p(\mathbf{r})$. L'équation effective pour $p(\mathbf{r})$ peut s'obtenir en introduisant le développement $p(\mathbf{r}) = \sum_{k=0}^{\infty} St^{k/2} p_k(\mathbf{r})$ dans l'équation de Fokker-Planck (3.22) et en regroupant tous les termes du même ordre en St . Notons que l'opérateur $\hat{L}_1 = \partial_r^i v^i$ apparaissant dans (3.22) est plus petit que les autres opérateurs d'un facteur $St^{1/2}$. On obtient alors une hiérarchie d'équations pour les $p_k(\mathbf{r})$ dont la condition de solvabilité conduit à écrire une équation effective pour $p(\mathbf{r})$:

$$\left(\hat{M}_1 + \hat{M}_2 + \dots \right) p(\mathbf{r}) = 0, \quad (1.33)$$

où les opérateurs \hat{M}_k peuvent être écrits comme

$$\hat{M}_k p(r) = \int dv \left(\hat{L}_1 \hat{L}_0^{-1} \right)^k \hat{L}_1 p(r) P_r(v). \quad (1.34)$$

\hat{L}_0^{-1} désigne ici l'inverse de \hat{L}_0 , c'est-à-dire sa fonction de Green. Cet opérateur est défini de telle sorte que $\int dv \hat{L}_0^{-1} f(v) = 0$ pour toute fonction $f(v)$ telle que $\int dv f(v) = 0$. On peut alors vérifier que l'opérateur d'ordre le plus grand est $\hat{M}_1 = \partial_r^i b^{ij}(r) \partial_r^j$ qui, comme on s'y attendait, correspond à la diffusion turbulente. On retrouve ainsi la dynamique des traceurs pour $St \rightarrow 0$. La densité de probabilité $p(r)$ solution de $\hat{M}_1 p(r) = 0$ est tout simplement la distribution uniforme. Pour mesurer la concentration des particules, qui peut par exemple être estimée en termes de la dimension de corrélation locale $d_2(r)$, on calcule les opérateurs aux ordres suivants. On peut aisément vérifier que tous les opérateurs \hat{M}_k d'ordre k pair sont nuls. La première correction non-nulle à \hat{M}_1 est donc donnée par le troisième ordre \hat{M}_3 . Lorsque l'on ne s'intéresse qu'à la distribution stationnaire, on peut écrire

$$\hat{M}_3 \cdot = \partial_r^i [V^i \cdot], \text{ avec } V^i = -\frac{1}{2} (\partial_r^k \partial_r^l b^{ij}) (\partial_r^j b^{kl}). \quad (1.35)$$

L'opérateur \hat{M}_3 peut s'interpréter comme une dérive dans l'espace des positions r qui, pour le modèle de Kraichnan s'écrit $V^i = -2(d^2-1)(d-2+4h)h^2 St^2(r)r^i$. La forme fonctionnelle de cette dérive implique que les corrections d'ordre dominant à la distribution uniforme sont proportionnelles à $St(r)$. En effet, pour des écoulements isotropes, on peut chercher des solutions $p(r)$ qui ne dépendent que de la distance $r = |r|$ entre les particules. L'équation (1.33) devient alors une équation différentielle ordinaire de type Fokker-Planck. La solution stationnaire de flux nul donne alors $p(r)$. Dans les écoulements irréguliers ($h < 1$), on obtient $\ln p(r) \sim [(d+1)(d-2+2h)h^2/(1-h)] St(r)$ et la dimension de corrélation locale se comporte comme

$$d_2(r) \simeq d - \frac{2d(d+1)(d-2+4h)h^2}{d-2+2h} St(r). \quad (1.36)$$

Le second terme dans le membre de droite de cette équation disparaît lorsque $h \rightarrow 0$, ce qui confirme le fait que les propriétés de concentration décroissent lorsque l'écoulement devient de plus en plus irrégulier. Dans le cas des écoulements différentiables ($h = 1$), la distribution a un comportement en loi de puissance : $\ln p(r) \sim -2(d+1)(d+2)St \ln r$ et la dimension de corrélation se comporte comme

$$\bar{D}_2 = d - 2(d+1)(d+2) St + O(St^2). \quad (1.37)$$

Le déficit de dimension $d - \bar{D}_2$ se comporte comme $24St$ en dimension deux et comme $40St$ en dimension trois. Ces résultats sont en accord avec ceux de [WMÖD07] et peuvent être confirmés numériquement (voir Fig. 1.10(b)). Il est important de noter que, comme nous l'avons vu dans la section précédente, le déficit de dimension est $\propto St^2$ dans les écoulements corrélés, ainsi qu'en turbulence développée. Comme cela a été montré par [WGM10], l'introduction de corrélations temporelles est crucial pour reproduire les détails des statistiques des suspensions turbulentes.

1.2.2 Concentrations et vides en turbulence homogène développée

Comme nous allons maintenant le voir, les considérations en termes de nombre de Stokes local développées dans la section précédente ne se transpose pas de façon directe au cas de particule en suspension dans des écoulements turbulents. Ceci est lié à la présence de structures dans l'écoulement qui vont affecter les concentrations de particules. Il est clair d'après la Fig. 1.11 que les fluctuations dans la distribution spatiale des particules s'étendent aux échelles bien à l'intérieure de la gamme inertielle. Aussi, pour des nombres de Stokes de l'ordre de l'unité, on observe que les tailles des vides couvrent toutes les échelles de l'écoulement porteur turbulent, en accord avec ce qui a été observé dans la cascade inverse bidimensionnelle [BDLG04, CGV06]. Pour obtenir une vision quantitative de ces concentrations, nous considérons ici la densité de probabilité $P_{r,\tau}(\rho)$ de la densité de masse de particules moyennée sur une échelle r à l'intérieure de la gamme inertielle. En d'autres termes, il s'agit de la distribution de probabilité de la fraction de particules dans un cube de taille r , normalisée par le volume r^3 de ce cube. Pour les traceurs, qui sont distribués de manière uniforme, et pour un nombre infini de particules, cette densité de probabilité est une fonction de Dirac centrée sur $\rho = 1$. Pour un nombre fini N de particules, la probabilité d'en trouver un nombre n dans un cube de taille r est donnée par la loi binomiale, ce qui conduit à une forme explicite de la densité moyennée $\rho = nL^3/(Nr^3)$. Dans notre cas, le nombre typique de particules dans des cellules de tailles inertielles est de plusieurs milliers. Ainsi, on ne s'attend pas à ce

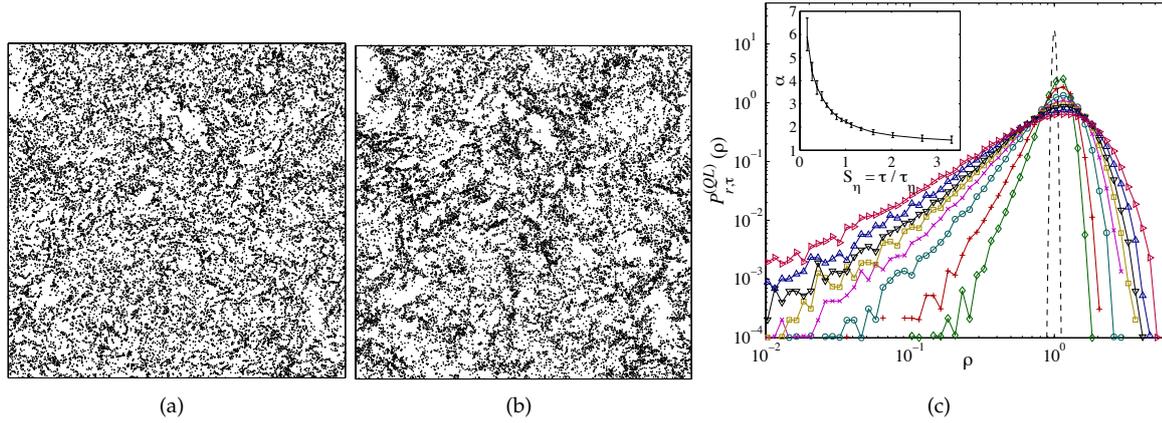


FIGURE 1.11 – Position de particules avec un nombre de Stokes $St = \tau/\tau_\eta = 1$ (a) et $St = 4$ (b) dans une fine tranche d'épaisseur $\approx 4\eta$ d'un écoulement porteur turbulent avec $R_\lambda \approx 290$. (c) Densité de probabilité quasi-lagrangienne de la densité de masse ρ_r , moyennée sur des boîtes de taille r pour $St = \tau/\tau_\eta = 0.27, 0.37, 0.58, 0.80, 1.0, 1.33, 2.03$ et 3.31 (de bas en haut) à l'échelle $r = \mathcal{L}/16 \approx 20\eta$ et pour $R_\lambda = 185$; la ligne pointillée correspond à une distribution uniforme (loi binomiale). Encart : exposant de la loi de puissance aux petites valeurs de ρ en fonction de St pour la même valeur de r .

que les effets d'un nombre fini de particules n'affectent le ventre de la distribution pour $\rho = \mathcal{O}(1)$, mais ils peuvent certainement être perçus pour $\rho \ll 1$ à cause de la présence des vides. Pour réduire cet effet, nous avons considéré la densité de masse quasi-lagrangienne $P_{r,\tau}^{(QL)}(\rho)$, qui correspond à une moyenne lagrangienne par rapport à la mesure naturelle (voir §1.1.1) et qui est obtenue en pondérant chaque cellule par la masse de particules qu'elle contient. Pour des distributions statistiquement homogènes, l'approche quasi-lagrangienne et celle eulérienne peuvent être reliées en remarquant que $\langle \rho_r^p \rangle_{QL} = \langle \rho_r^{p+1} \rangle$ (voir, par exemple, [BGH04]).

La figure 1.11(c) représente $P_{r,\tau}^{(QL)}(\rho)$ pour différents temps de réponse des particules τ et pour une échelle donnée ($r = \mathcal{L}/16 \approx 20\eta$) à l'intérieur de la gamme inertielle. Des déviations par rapport à une distribution uniforme peuvent être clairement observées. Elles deviennent de plus en plus fortes lorsque τ augmente. Cela signifie que les fluctuations de concentration ne sont pas seulement importantes aux échelles dissipatives, mais aussi aux échelles inertielles pour des temps de Stokes de l'ordre de τ_η . Une observation remarquable est que la queue aux faibles densités a un comportement algébrique $P_{r,\tau}^{(QL)}(\rho) \sim \rho^{\alpha(r,\tau)}$. Cela implique que la densité de probabilité eulérienne a elle aussi une queue en loi de puissance pour $\rho \ll 1$, avec pour exposant $\alpha - 1$. La dépendance de cet exposant pour r fixé et en fonction du nombre de Stokes est montré dans l'encart de la Fig. 1.11(c). Aux faibles inerties ($St \rightarrow 0$), il tend vers l'infini afin de retrouver le comportement non-algébrique des traceurs. Aux plus grands nombre de Stokes considérés ici, on observe que $\alpha \rightarrow 1$, ce qui indique une probabilité non nulle d'observer des régions totalement vides de particules. Il est toutefois important de noter que l'on s'attend à ce que α tende vers l'infini lorsque $St \rightarrow \infty$ avec r fixé, car on doit retrouver une distribution uniforme dans la limite des très grandes inerties. Les queues algébriques de cette distribution de masse sont pertinentes à de nombreux processus physique ou chimiques impliquant des particules lourdes. Il est notamment important de prendre en compte les distributions de particules dans les régions les plus vides pour améliorer la modélisation de la croissance de gouttelettes par condensation de vapeur sur des aérosols [BFF01] ou bien encore la déposition humide d'aérosols [KS01].

Lorsque l'on fixe le temps de réponse τ et que l'on augmente l'échelle d'observation r , on reproduit le même comportement qualitatif que quand on fixe r et que l'on diminue τ . On retrouve une distribution uniforme dans les deux limites $r \rightarrow \infty$ ou bien $\tau \rightarrow 0$. Comme cela a été anticipé dans la sous-section précédente, ces deux limites sont en fait équivalentes. Aux échelles spatiales $r \gg \eta$ dans la gamme inertielle, le champ de vitesse du fluide n'est plus régulier : selon la théorie Kolmogorov 1941 (K41), les incréments de vitesse se comportent comme $\delta_r u \sim (\varepsilon r)^{1/3}$, où ε est le taux moyen de dissipation d'énergie cinétique. La théorie K41 suggère que les fluctuations aux échelles r sont associées à des échelles temporelles de l'ordre du temps de retournement $\tau_r = r/\delta_r u \sim \varepsilon^{-1/3} r^{2/3}$. Ceci implique que, quelque soit la valeur finie du temps de réponse τ des particules, et pour des échelles r suffisamment grandes, l'inertie locale mesurée par $St(r) = \tau/\tau_r$ (voir section précédente) devient si petite que les particules se comportent comme des traceurs et se répartissent donc de façon uniforme en espace [FFS03]. On s'attend à ce que pour des valeurs finies de $St(r)$, les déviations par rapport à une distribution uniforme aient des propriétés d'invariance d'échelle [BFF01]. En particulier, les études dans

des écoulements aléatoires décorrélés en temps rapportées dans la sous-section précédente suggèrent que la distribution des particules ne devrait dépendre que du nombre de Stokes local $St(r)$. Toutefois, comme cela est expliqué dans la suite, cet argument ne s'applique pas à des écoulements réalistes.

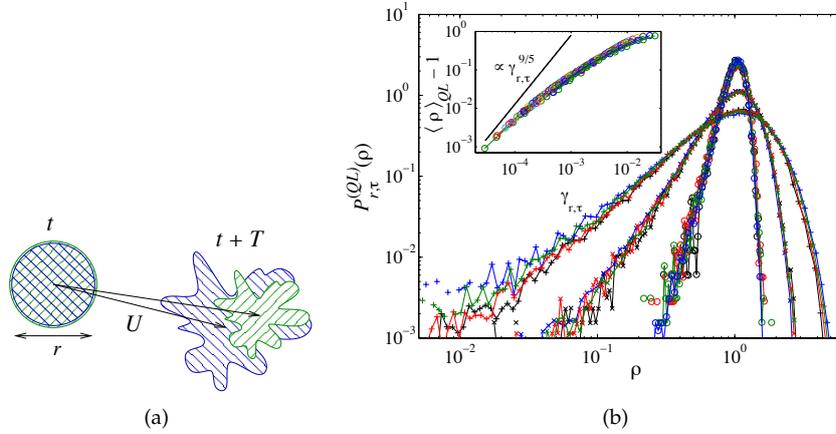


FIGURE 1.12 – (a) Représentation schématique de l'évolution d'un blob de particules (en vert) comparée à celle du fluide (en bleu) entre les instants t et $t + T$; les particules se contracte par rapport au fluide avec un taux $\gamma_{r,\tau}$ qui dépend à la fois de l'échelle r considérée et du temps de réponse des particules. (b) Densité de probabilité quasi-lagrangienne de la masse de particules moyennée aux échelles inertielles pour trois valeurs différentes du taux de contraction adimensionné $\gamma_{r,\tau}\tau\eta$. De bas en haut : $\gamma_{r,\tau} = 4.8 \times 10^{-4}/\tau\eta$ (les différentes courbes correspondent à $St_\eta = 0.16, 0.27, 0.37, 0.48$), $\gamma_{r,\tau} = 2.1 \times 10^{-3}/\tau\eta$ (pour $St_\eta = 0.58, 0.69, 0.80, 0.91, 1.0$), $\gamma_{r,\tau} = 7.9 \times 10^{-3}/\tau\eta$ (pour $St = 1.60, 2.03, 2.67$ et 3.31). Encart : déviation de l'unité du moment quasi-lagrangien du premier ordre pour r aux échelles inertielles. En comparaison, on a représenté par une ligne pleine le comportement $\propto \gamma_{r,\tau}^{9/5}$ obtenu lorsque l'on suppose que les particules sont concentrées dans des agrégats ponctuels eux-mêmes distribués de manière uniforme. Les données correspondent à $R_\lambda = 185$.

La présence d'inhomogénéités dans la distribution spatiale de particules vient de la compétition entre l'étirement, la compression et le repliement résultant de leur dynamique chaotique dissipative. Aux petites échelles où l'écoulement est lisse en espace, nous avons vu dans la section 1.1 que ces mécanismes sont décrits par les exposants de Lyapunov et leurs fluctuations sur des temps finis associées aux taux d'étirement et de contraction de volumes infinitésimaux par la dynamique. Aux échelles plus grandes, la compétition entre la dispersion turbulente et la concentration des particules est aussi à l'équilibre. La distribution des particules à une échelle $r \gg \eta$ donnée ne devrait dépendre que de l'inverse du taux de contraction $\gamma_{r,\tau}$ d'une tâche \mathcal{B}_r de taille r de particules ayant un temps de réponse τ (voir Fig. 1.12(a)). Aux échelles inertielles, l'écoulement n'est pas différentiable et une approche basée sur les exposants de Lyapunov ne peut pas être utilisée. En particulier, le taux $\gamma_{r,\tau}$ se doit de dépendre de r . Pour estimer ce taux de contraction dans l'asymptotique des τ petits, nous utilisons l'approximation de Maxey pour la dynamique des particules [Max87]

$$\dot{\mathbf{X}} \approx \mathbf{v}(\mathbf{X}, t) \quad \text{avec} \quad \mathbf{v} = \mathbf{u} - \tau(\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}). \quad (1.38)$$

Les trajectoires de particules peuvent donc être approchées par celles de traceurs dans le champ de vitesse synthétique compressible \mathbf{v} . Les corrections dues à leur inertie sont à l'ordre dominant proportionnelles à l'accélération du fluide qui, en turbulence développée, est elle-même dominée par le gradient de pression. Le taux de contraction du blob \mathcal{B}_r de volume r^3 est alors $\gamma_{r,\tau} = (1/r^3) \int_{\mathcal{B}_r} d^3x \nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x})$. Comme $\nabla \cdot \mathbf{v} \simeq \tau \nabla^2 p$, on obtient $\gamma_{r,\tau} \sim (\tau/r^2) \delta_r p$, où $\delta_r p$ désigne l'incrément typique de pression sur une séparation r . Cela signifie que la dépendance en échelle du taux de contraction est directement liée aux propriétés d'échelle de la pression. Des arguments dimensionnels suggèrent que $\delta_r p \sim (\varepsilon r)^{2/3}$, de telle sorte que le taux de contraction se comporte comme $\gamma_{r,\tau} \sim \tau \varepsilon^{2/3}/r^{4/3}$. Toutefois, comme cela est observé dans [GF01, TI03], les propriétés auto-similaires K41 pour la pression ne sont observables que lorsque le nombre de Reynolds est excessivement grand (typiquement pour $R_\lambda \gtrsim 600$). Dans la simulation utilisée dans cette étude, où $R_\lambda < 200$, les propriétés d'échelle de la pression sont données par le balayage aléatoire par les grandes échelles (« sweeping ») [Ten75], et on observe $\delta_r p \sim U(\varepsilon r)^{1/3}$ (comme dans d'autres simulations à des nombres de Reynolds comparables, voir [GF01, TI03]). Ceci implique que le taux de contraction s'écrit $\gamma_{r,\tau} \sim \tau \varepsilon^{1/3} U/r^{5/3}$.

La figure 1.12(b) montre $P_{r,\tau}^{(QL)}(\rho)$ pour trois choix de $\gamma_{r,\tau}$ obtenus par différentes combinaisons de r et τ . La superposition des différentes courbes donne une évidence forte que la distribution de masse moyennée est seulement une fonction du taux de contraction $\gamma_{r,\tau}$ dépendant de l'échelle. En particulier,

comme cela est représenté dans l’encart de la Fig. 1.12(b), les déviations par rapport à l’unité du moment d’ordre 1 de la distribution se concentrent sur une courbe qui ne dépend que de $\gamma_{r,\tau}$, et cela quelles que soient les valeurs de St et les échelles dans la gamme inertielle de cette simulation. Cette quantité est identique au moment d’ordre deux de la distribution eulérienne et est liée à la probabilité que deux particules se trouvent à une distance r aux échelles inertielles. Notons que la distribution de particules devient uniforme aux grandes échelles d’une façon très lente, et notamment bien plus lente que si les particules étaient distribuées sur des agrégats ponctuels uniformément répartis dans l’écoulement. Comme cela est montré sur la Fig. 1.12(b) pour comparaison, on aurait dans ce cas $\langle \rho^2 \rangle - 1 \propto r^{-3} \propto \gamma_{r,\tau}^{9/5}$.

1.2.3 Un modèle heuristique pour les fluctuations de la masse

Comme nous l’avons vu dans la sous-section précédente, les distributions de probabilité de la masse de particules lourdes aux échelles inertielles de la turbulence sont caractérisées par une loi de puissance aux petites valeurs et une queue plus rapide qu’exponentielle aux grandes masses. Il est possible de développer un modèle simple pour la dynamique de la masse de particules dans un écoulement aléatoire qui appartient à la même classe d’universalité. L’idée est présentée dans [BC07] et consiste à diviser l’écoulement en différentes cellules qui éjectent ou non des particules. Les cellules ont une nature indépendante de celle de leur voisine; l’écoulement reste constant pendant un certain temps et change périodiquement de façon aléatoire. Après un grand nombre d’itérations de ce processus, la distribution de masse atteint un régime statistiquement stationnaire pour lequel il est possible d’écrire une équation de Markov et notamment d’exprimer analytiquement les queues de la distribution de masse en fonction des paramètres du modèle.

Nous commençons par donner ici quelques arguments phénoménologiques qui permettent de motiver la pertinence d’un tel modèle pour la dynamique de particules lourdes dans des écoulements incompressibles. Pour cela nous nous concentrons sur le cas bidimensionnel et considérons une cellule de taille ℓ dans laquelle la vorticité de fluide ω est constante et la vitesse s’annule en son centre. Cela revient à considérer que la vitesse du fluide est linéaire dans la cellule avec un profil donné à l’ordre dominant pas le tenseur des contraintes. Nous nous restreignons de plus au cas où les deux valeurs propres de cette matrice sont purement imaginaires conjuguées. La dynamique des particules se simplifie et est alors donnée par le système linéaire du second ordre

$$\frac{d^2 \mathbf{X}}{dt^2} = -\frac{1}{\tau} \frac{d\mathbf{X}}{dt} + \frac{\omega}{\tau} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{X}. \quad (1.39)$$

On peut aisément vérifier que les quatre valeurs propres de la matrice d’évolution sont les complexes conjugués

$$\lambda_{\pm, \pm} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 \pm 4i\tau\omega}}{2\tau}. \quad (1.40)$$

Seuls $\lambda_{+,-}$ et $\lambda_{+,+}$ ont des parties réelles positives données par

$$\mu = \frac{-1 + \frac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{1 + 16\tau^2\omega^2} + 2}}{2\tau}. \quad (1.41)$$

Cela signifie que la distance entre les particules et le centre de la cellule croît de manière exponentielle en temps avec un taux μ . Si nous considérons maintenant que les particules sont réparties initialement de façon uniforme, nous obtenons que leur masse dans la cellule décroît exponentiellement en temps avec un taux égal à -2μ . Ainsi, la masse de particules qui sont toujours dans la cellule après un temps T s’écrit

$$m(T) = m(0)(1 - \gamma) = m(0) \exp\left[-\frac{T}{\tau} \left(-1 + \frac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{1 + 16\tau^2\omega^2} + 2}\right)\right]. \quad (1.42)$$

Le taux γ auquel les particules sont éjectées dépend de leur temps de réponse τ et des deux temps caractéristiques T et $1/\omega$ de l’écoulement. Le premier qui est caractéristique de la durée du processus d’éjection est donné par le temps de vie typique des structures de l’écoulement. Le second est le temps de retournement et mesure la force du tourbillon. Il y a ainsi deux paramètres adimensionnels pertinents pour caractériser le taux d’éjection γ : le nombre de Stokes $St = \tau\omega$ mesurant l’inertie des particules et le nombre de Kubo $Ku = T\omega$ qui est le rapport entre le temps de corrélation des structures et leur temps de retournement. Cela conduit à écrire le taux d’éjection comme

$$\gamma = 1 - \exp\left[-\frac{Ku}{St} \left(-1 + \frac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{1 + 16St^2} + 2}\right)\right]. \quad (1.43)$$

La fraction de particules éjectée est représentée en fonction du nombre de Stokes sur la Fig. 1.13(a) pour trois valeurs différentes du nombre de Kubo. La fonction s'annule comme $Ku St$ dans la limite $St \rightarrow 0$ et comme $Ku St^{-1/2}$ pour $St \rightarrow \infty$. Elle atteint un maximum indiquant une ségrégation maximale des particules pour $St \approx 1.03$ indépendamment de la valeur de Ku .

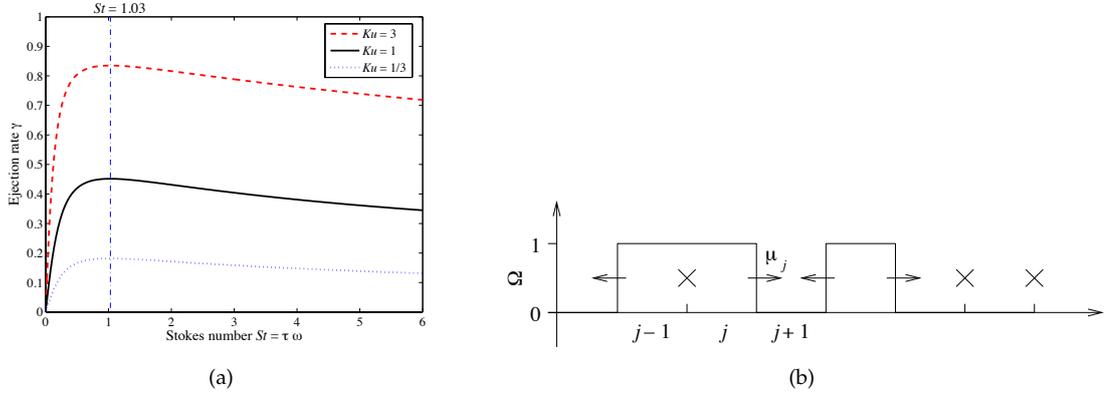


FIGURE 1.13 – (a) Fraction de la masse de particules initialement réparties de façon uniforme éjectée d'une cellule de taille ℓ arbitraire en fonction du nombre de Stokes $St = \tau \omega$. Les différentes courbes correspondent à différentes valeurs du nombre de Kubo Ku comme indiqué dans la légende. (b) Représentation schématique de la dynamique de la masse dans le cas unidimensionnel : les flux sont représentés par des flèches et les croix signifient qu'il n'y a pas de flux.

Cette approche peut en principe être étendue au cas tridimensionnel pour obtenir un taux d'éjection depuis des cellules en rotation uniforme, c'est-à-dire avec une vorticité constante ω . Il y a toutefois deux difficultés essentielles. La première est qu'en dimension trois, les valeurs propres de la matrice des contraintes dans les régions de rotation ne sont plus purement imaginaires mais ont une partie réelle donnée par l'opposé du taux d'étirement dans la direction transverse. Un tel étirement tourbillonnaire doit être choisi pour coller aux observations dans les écoulements réels. La seconde difficulté vient du caractère vectoriel de la vorticité qui a donc une direction, de telle sorte que l'éjection de la cellule se fait maintenant dans les directions perpendiculaires à celle de ω . Ces deux points impliquent que le spectre de taux d'éjection admissibles est bien plus étendu que dans le cas bidimensionnel. Toutefois, l'idée qualitative reste inchangée.

Maintenant que nous avons vu le processus d'éjection de masse de particules des cellules en rotation, nous pouvons passer à la description du modèle. Nous commençons pour cela par le cas unidimensionnel et considérons une partition d'un intervalle en N petites cellules. La j -ième cellule contient au temps $t = n$ une masse $m_j(n)$ de particules qui est une variable continue. À chaque instant entier n , on choisit indépendamment N variables indépendantes Ω_j qui valent 1 avec une probabilité p et 0 avec $1 - p$. L'évolution de la masse entre les instants n et $n + 1$ est alors donnée par

$$m_j(n + 1) = \begin{cases} m_j(n) - \frac{\gamma}{2} [2 - \Omega_{j-1} - \Omega_{j+1}] m_j(n) & \text{si } \Omega_j = 1, \\ m_j(n) + \frac{\gamma}{2} [\Omega_{j-1} m_{j-1}(n) + \Omega_{j+1} m_{j+1}(n)] & \text{si } \Omega_j = 0. \end{cases} \quad (1.44)$$

Pour $\Omega_j = 1$, la j -ième cellule perd de la masse si $\Omega_{j-1} = 0$ ou bien $\Omega_{j+1} = 0$, et pour $\Omega_j = 0$, elle en gagne si $\Omega_{j-1} = 1$ ou $\Omega_{j+1} = 1$. Le flux de masse entre la j -ième et la $(j+1)$ -ième cellule est proportionnel à $\Omega_j - \Omega_{j+1}$ (voir Fig. 1.13(b).) Ainsi, lorsque $\Omega_j = \Omega_{j+1}$, il n'y a pas de masse transférée. Le système est complété par des conditions de bord périodiques et il est clair que la masse totale est conservée. Nous supposons dans la suite que la masse vaut initialement $m_j = 1$ dans chacune des cellules et donc que la masse totale est $\sum_j m_j = N$. L'homogénéité spatiale du processus aléatoire Ω_j implique que $\langle m_j \rangle = 1$ à tout temps.

Le champ de masse $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_N)$ définit un processus de Markov. Sa distribution de probabilité $p_N(\mathbf{m}, n + 1)$ au temps $n + 1$ s'exprime en fonction de celle au temps n par une équation de Markov qui prend la forme générale

$$\begin{aligned} p_N(\mathbf{m}, n + 1) &= \int d^N m' p_N(\mathbf{m}', n) P[\mathbf{m}' \rightarrow \mathbf{m}] \\ &= \int d^N m' p_N(\mathbf{m}', n) \int d^N \Omega p(\Omega) P[\mathbf{m}' \rightarrow \mathbf{m} | \Omega], \end{aligned} \quad (1.45)$$

où $P[\mathbf{m}' \rightarrow \mathbf{m} | \Omega]$ est la probabilité de transition du champ \mathbf{m}' vers \mathbf{m} conditionnée sur la réalisation de

$\Omega = (\Omega_1, \dots, \Omega_N)$. Dans notre cas, elle prend la forme

$$P[\mathbf{m}' \rightarrow \mathbf{m} | \Omega] = \prod_{j=1}^N \delta[m_j - (m'_j + \mu_{j-1}(n) - \mu_j(n))]. \quad (1.46)$$

La variable μ_j désigne le flux de masse entre la j -ième et la $(j + 1)$ -ième cellule. C'est une fonction de Ω_j, Ω_{j+1} , et de la masse contenue dans les deux cellules qui s'écrit

$$\mu_j(n) = \frac{\gamma}{2} [\Omega_j(n)(1 - \Omega_{j+1}(n))m'_j(n) - \Omega_{j+1}(n)(1 - \Omega_j(n))m'_{j+1}(n)]. \quad (1.47)$$

Dans notre cas, la probabilité jointe des Ω_j se factorise et on a

$$p(\Omega_j) = p \delta(\Omega_j - 1) + (1 - p) \delta(\Omega_j), \quad (1.48)$$

de telle sorte que l'équation de Markov (1.45) peut être écrite d'une manière explicite assez simple.

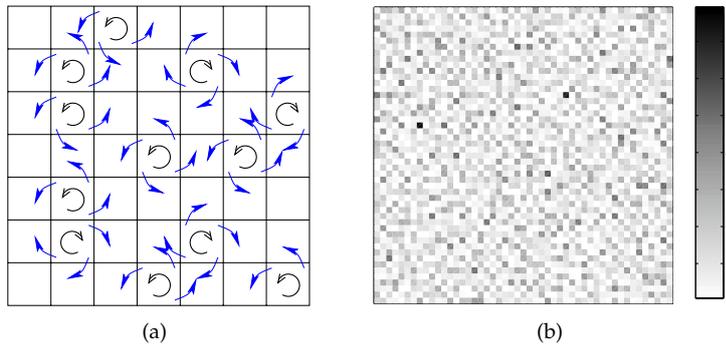


FIGURE 1.14 – (a) Représentation schématique du modèle en dimension deux. Les cellules en rotation sont représentées par des petits tourbillons ; les flux de masse (flèches bleues) vont des cellules en rotation vers leurs voisines sans tourbillon. (b) Instantané de la distribution de masse dans le régime statistiquement stationnaire pour un domaine de 50^2 cellules avec $p = 3/4$; les carrés blancs sont des cellules quasiment vides et les zones les plus sombres sont là où la masse est concentrée.

Le modèle se généralise facilement au cas bidimensionnel. Le transfert de masse depuis une cellule en rotation peut s'effectuer à un, deux, trois ou quatre des voisines les plus proches (voir Fig. 1.14(a)). On peut écrire de manière similaire une équation de Markov qui ressemble à (1.45) pour la probabilité jointe $p_{N,N}(\mathbb{M}, n)$ au temps n de la configuration de masse $\mathbb{M} = \{m_{i,j}\}_{1 \leq i,j \leq N}$. La probabilité de transition s'écrit dans ce cas

$$P[\mathbb{M}' \rightarrow \mathbb{M} | \Omega] = \prod_{i=1}^N \prod_{j=1}^N \delta[m_{i,j} - (m'_{i,j} + \mu_{i-1,j}^{(1)} - \mu_{i,j}^{(1)}) + \mu_{i,j-1}^{(2)} - \mu_{i,j}^{(2)}]. \quad (1.49)$$

où les flux prennent maintenant la forme

$$\mu_{i,j}^{(1)} = \frac{\gamma}{4} [\Omega_{i,j}(1 - \Omega_{i+1,j}) m'_{i,j} - \Omega_{i+1,j}(1 - \Omega_{i,j}) m'_{i+1,j}] \quad (1.50)$$

et $\mu_{i,j}^{(2)}$ est défini en interchangeant i et j dans $\mu_{i,j}^{(1)}$. Après un grand nombre de pas de temps, un état d'équilibre statistique est atteint. La distribution stationnaire est obtenue en supposant que $p_{N,N}(\mathbb{M}, n) = p_{N,N}(\mathbb{M})$ est indépendant de n dans l'équation de Markov (1.45). Dans ce régime, la masse fluctue autour de sa valeur moyenne 1 associée à une distribution uniforme ; de fortes déviations aux petites masses peuvent être observées sur la Fig. 1.14(b). Le modèle peut être aisément généralisé à une dimension d'espace arbitraire. Toutefois, comme nous l'avons vu plus haut, une telle extension au cas tridimensionnel pourrait ne pas être pertinente pour décrire les concentrations de particules inertielles en turbulence.

Considérons d'abord le cas unidimensionnel dans le régime statistiquement stationnaire. En intégrant (1.45), il est possible d'exprimer la distribution de probabilité p_1 de la masse dans une cellule en fonction de la distribution à trois points p_3 au temps n

$$p_1(m_j) = \int dm'_{j-1} dm'_j dm'_{j+1} p_3(m'_{j-1}, m'_j, m'_{j+1}) \int d\Omega_{j-1} d\Omega_j d\Omega_{j+1} \times p(\Omega_{j-1}) p(\Omega_j) p(\Omega_{j+1}) \delta[m_j - (m'_j + \mu_{j-1} - \mu_j)]. \quad (1.51)$$

TABLE 1.1 – Énumération de toutes les configurations possibles de la vorticité Ω dans trois cellules voisines avec leur probabilité et les flux de masse associés.

Ω_{j-1}	Ω_j	Ω_{j+1}	Prob	μ_{j-1}	μ_j
0	0	0	$(1-p)^3$	0	0
0	0	1	$p(1-p)^2$	0	$-\gamma m'_{j+1}/2$
0	1	0	$p(1-p)^2$	$-\gamma m'_j/2$	$\gamma m'_j/2$
0	1	1	$p^2(1-p)$	$-\gamma m'_j/2$	0
1	0	0	$p(1-p)^2$	$\gamma m'_{j-1}/2$	0
1	0	1	$p^2(1-p)$	$\gamma m'_{j-1}/2$	$-\gamma m'_{j+1}/2$
1	1	0	$p^2(1-p)$	0	$\gamma m'_j/2$
1	1	1	p^3	0	0

On explicite alors tous les flux possibles, ainsi que leurs probabilités respectives, en considérant toutes les configurations possibles du triplet de vorticité $(\Omega_{j-1}, \Omega_j, \Omega_{j+1})$. Les résultats sont résumés dans la table 1.1.

Ceci conduit à réécrire la distribution à un point comme

$$\begin{aligned}
 p_1(m) = & [p^3 + (1-p)^3] p_1(m) + \frac{2p^2(1-p)}{1-\gamma/2} p_1\left(\frac{m}{1-\gamma/2}\right) + \\
 & + \frac{p(1-p)^2}{1-\gamma} p_1\left(\frac{m}{1-\gamma}\right) + 2p(1-p)^2 \int_0^{2m/\gamma} dm' p_2\left(m', m - \frac{\gamma}{2}m'\right) + \\
 & + p^2(1-p) \int_0^{2m/\gamma} dm' \int_0^{2m/\gamma-m'} dm'' p_3\left(m', m - \frac{\gamma}{2}(m' + m''), m''\right). \quad (1.52)
 \end{aligned}$$

Le premier terme du membre de droite vient des réalisations où le flux est nul, le deuxième et le troisième correspondent à l'éjection depuis la cellule considérée vers un ou deux voisins. Le quatrième terme contient une moyenne sur la distribution à deux points et est lié aux événements où la masse est transférée d'un des voisins seulement vers la cellule de référence. Finalement, le dernier terme prend en compte les transferts depuis les deux voisins directs.

Les simulations numériques de ce modèle unidimensionnel sont utiles pour obtenir des informations qualitatives sur p_1 . La figure 1.15(a) représente la forme fonctionnelle de p_1 dans le régime stationnaire pour différentes valeurs de γ et pour $p = 1/2$. Ces courbes sont très similaires aux mesures obtenues en turbulence développée que nous avons vues dans la sous-section 1.2.2. Cela donne de l'évidence que d'un point de vue qualitatif, le modèle introduit reproduit les mécanismes principaux de la concentration préférentielle des particules. De manière plus spécifique, on observe que dans les deux cas, la densité de probabilité de la masse a un comportement algébrique aux petites valeurs. Cela implique que l'éjection des cellules a une signature statistique forte. Une seconde observation est que la queue de probabilité aux grandes valeurs décroît plus rapidement qu'une exponentielle, comme cela est aussi observé en turbulence développée. Comme nous allons maintenant le voir, ces comportements asymptotiques peuvent être compris analytiquement dans le modèle.

Pour comprendre le comportement algébrique aux petites masses, nous exposons ici une borne inférieure pour la probabilité $P^<(m)$ que la masse dans une cellule donnée soit plus petite que m . On a

$$P^<(m) = \text{Prob}(m_j(n) < m) \geq \text{Prob}(\mathcal{A}), \quad (1.53)$$

où \mathcal{A} est un ensemble de réalisations spatio-temporelles de Ω telles que la masse dans la j -ième cellule au temps n soit plus petite que m . On peut choisir par exemple un ensemble de réalisations qui éjectent la masse de la façon la plus efficace possible : pendant un temps N avant n , la j -ième cellule a une vorticité $\Omega_j = 1$ et ses deux voisins ont $\Omega_{j-1} = \Omega_{j+1} = 0$. La masse au temps n s'exprime en fonction de celle au temps $n - N$ par

$$m_j(n) = (1-\gamma)^N m_j(n-N), \quad \text{d'où } N = \frac{\log[m_j(n-N)/m_j(n)]}{\log(1-\gamma)}. \quad (1.54)$$

La probabilité d'une telle réalisation est clairement $p^N (1-p)^{2N}$. En remplaçant N par l'expression obtenue dans (1.54), on voit que

$$\text{Prob}(\mathcal{A}) = \left[\frac{m_j(n)}{m_j(n-N)} \right]^\beta \quad \text{avec } \beta = \frac{\log[p(1-p)^2]}{\log(1-\gamma)}. \quad (1.55)$$

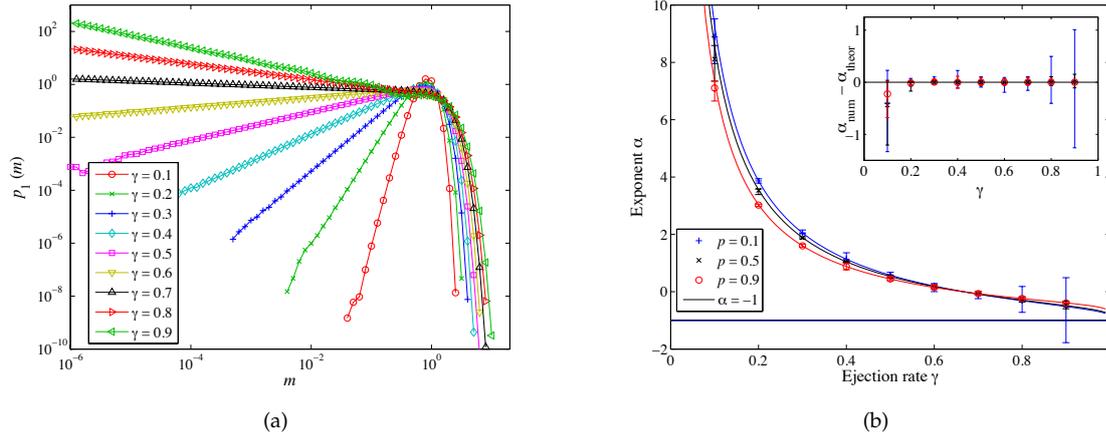


FIGURE 1.15 – (a) Distribution de probabilité à un point de la masse en dimension 1 pour $p = 1/2$ et différentes valeurs du paramètre γ . L'intégration a été effectuée sur $2^{16} = 65536$ cellules et la moyenne temporelle sur 10^6 pas de temps. (b) Exposant α en fonction du taux d'éjection γ pour trois valeurs différentes de p . Les lignes pleines correspondent à la prédiction (1.58); les barres d'erreur sont estimées par la déviation maximale de la dérivée logarithmique et de l'exposant mesuré. Encart : différence entre l'estimation numérique et la valeur prédite par la théorie.

Après avoir moyenné par rapport à la masse initiale $m_j(n - N)$, on obtient

$$P^<(m) \geq A m^\beta. \quad (1.56)$$

Ainsi la probabilité cumulée de la masse ne peut pas avoir de queue plus rapide qu'une loi de puissance aux petites valeurs. Il est donc raisonnable de faire l'hypothèse que le comportement de $p_1(m)$ est algébrique pour $m \rightarrow 0$, c'est-à-dire que $p_1(m) \simeq C m^\alpha$. Pour obtenir le comportement de l'exposant α en fonction des paramètres γ et p , nous injectons cet Ansatz dans l'équation de Markov stationnaire (1.52). On s'attend à ce que le comportement pour m petit soit dominé par les termes d'éjection, c'est-à-dire les trois premiers termes du membre de droite de (1.52) et que les termes impliquant les probabilités à deux et trois points ne contribuent qu'à des termes sous-dominants. Ceci conduit à

$$C m^\alpha \approx C [p^3 + (1-p)^3] m^\alpha + C \frac{2p^2(1-p)}{1-\gamma/2} \left[\frac{m}{1-\gamma/2} \right]^\alpha + C \frac{p(1-p)^2}{1-\gamma} \left[\frac{m}{1-\gamma} \right]^\alpha. \quad (1.57)$$

En égalisant les différentes constantes, on obtient finalement que l'exposant α doit satisfaire

$$\frac{2p}{(1-\gamma/2)^{\alpha+1}} + \frac{(1-p)}{(1-\gamma)^{\alpha+1}} = 3. \quad (1.58)$$

L'exposant α donné par cette relation est différent de la borne inférieure $\beta - 1$ obtenue dans (1.55) et (1.56). Toutefois, on peut vérifier que α approche sa borne inférieure pour $p \rightarrow 0$. Comme on le voit dans la Fig. 1.15(b), la formule (1.58) est en bon accord avec les simulations numériques. À noter que pour toutes les valeurs de p , on a $\alpha \leq 0$ pour $\gamma \geq 2/3$. Selon (1.43), les valeurs du taux d'éjection plus grandes que $2/3$ ne peuvent être obtenues que pour des valeurs du nombre de Kubo suffisamment grandes. Ceci est conforme au fait que des lois avec un exposant négatif n'ont jamais été observées dans les simulations numériques de particules dans des écoulements turbulents où $Ku \approx 1$.

Il est bien plus difficile d'obtenir à partir des simulations numériques le comportement de $p_1(m)$ aux grandes valeurs de la masse. Comme on le voit sur la Fig. 1.15(a), il n'y a aucun événement où la masse est plus grande que dix fois sa valeur moyenne. Nous présentons tout de même un argument qui suggère que la queue de probabilité est plus rapide qu'une exponentielle, et en particulier que $\log p_1(m) \propto -m \log m$ lorsque $m \gg 1$. Observons tout d'abord que pour obtenir une masse importante dans une cellule donnée, il faut y transférer la masse depuis un nombre important M de cellules voisines. Pour déplacer la masse de la j -ième cellule vers la $(j-1)$ -ième, la meilleure configuration de la vorticité est clairement $(\Omega_{j-1}, \Omega_j, \Omega_{j+1}) = (0, 1, 1)$. Après N pas de temps avec cette configuration, la fraction de masse transférée est $1 - (1 - \gamma/2)^N$. Ce processus est alors répété de façon récursive pour déplacer la masse vers le voisin suivant. Après ordre M itérations, la masse dans le M -ième voisin est

$$m = \frac{1 - [1 - (1 - \gamma/2)^N]^M}{(1 - \gamma/2)^N}. \quad (1.59)$$

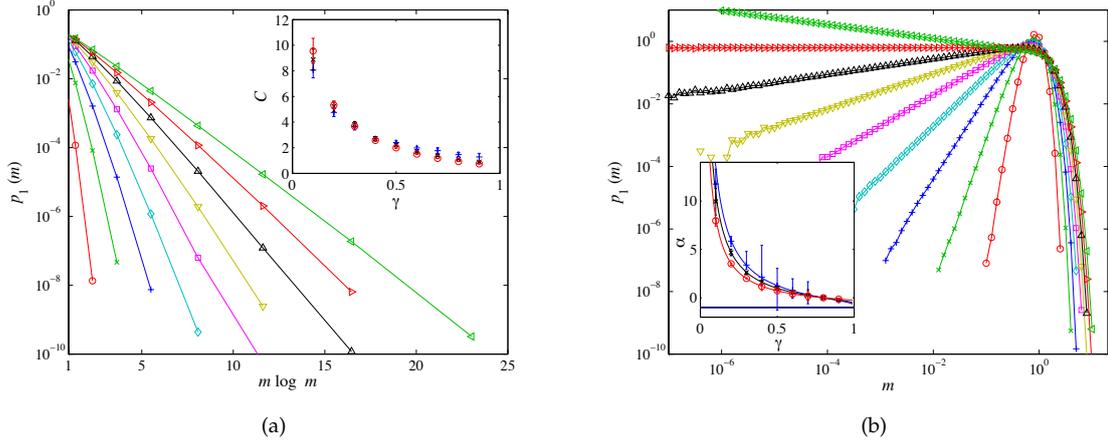


FIGURE 1.16 – (a) Densité de probabilité de la masse en un point en fonction de $m \log m$ pour $p = 1/2$ et différentes valeurs de γ (mêmes symboles que pour la Fig. 1.15(a)). Encart : comportement de la constante C qui apparaît dans (1.62) en fonction du taux γ pour trois valeurs différentes de p (croix bleues : $p = 0.1$, croix noires : $p = 0.5$, cercles rouges : $p = 0.9$). (b) Densité de probabilité de la masse en un point en dimension deux pour $p = 1/2$ et différents γ . L'intégration est ici faite sur un domaine de 1024^2 cellules et la moyenne temporelle sur 3×10^4 pas de temps. Encart : exposant α de la queue algébrique en fonction de γ avec les mêmes valeur de p que pour (a). Les lignes continues correspondent à la prédiction (1.63).

Cela signifie que

$$M = M(m, N) = \frac{\log [1 - m(1 - \gamma/2)^N]}{\log [1 - (1 - \gamma/2)^N]}, \quad (1.60)$$

avec la condition que $N > -(\log m)/[\log(1 - \gamma/2)]$. La probabilité de ce processus de transfert est

$$\mathcal{P} = [p^2(1 - p)]^{NM} = \exp [\log(p^2(1 - p)) NM(m, N)]. \quad (1.61)$$

Tous les processus de ce type contribuent à la queue droite de la densité de probabilité de la masse. Le comportement dominant est donné en choisissant $N = N^*$ tel que $N^* M(m, N^*)$ soit minimal. Un tel minimum ne peut pas être écrit explicitement. Toutefois, on peut d'une part remarquer que, si N est bien plus grand que sa borne inférieure ($N \gg -(\log m)/[\log(1 - \gamma/2)]$), on a alors $N M(m, N) \gg -m(\log m)/[\log(1 - \gamma/2)]$. D'autre part, quand N est choisi de l'ordre de $\log m$, on a alors $N M(m, N) \propto m \log m$. Ceci suggère que le minimum est atteint pour $N^* \propto \log m$. On prédit ainsi que la queue de la densité de probabilité de la masse se comporte comme

$$p_1(m) \propto \exp [-C m \log m], \quad (1.62)$$

où C est une constante positive qui dépend des paramètres p et γ . Comme on le voit dans la Fig. 1.16(a), un tel comportement est confirmé numériquement.

Les estimations des queues droites et gauches de la distribution de masse peuvent être étendues au cas bidimensionnel. Les résultats qualitatifs sont inchangés. L'exposant α aux petites masses est donné par

$$\frac{4p^3}{(1 - \gamma/4)^{\alpha+1}} + \frac{6p^2(1 - p)}{(1 - \gamma/2)^{\alpha+1}} + \frac{4p(1 - p)^2}{(1 - 3\gamma/4)^{\alpha+1}} + \frac{(1 - p)^3}{(1 - \gamma)^{\alpha+1}} = 5(1 - p + p^2). \quad (1.63)$$

Par des arguments similaires au cas unidimensionnel, on obtient $\log p_1(m) \propto -m \log m$. Les simulations numériques en dimension deux confirment ces comportements, comme cela peut être vu sur la Fig. 1.16(b).

Le modèle que nous avons introduit et décrit dans cette section reproduit de manière qualitative la plupart des caractéristiques de la distribution de masse de particules inertielles lourdes dans des écoulements turbulents. Dans [BC07], nous avons montré qu'en outre la distribution de masse moyennée sur des échelles plus grandes que la taille des cellules est équivalente de manière asymptotique à décroître le taux d'éjection et donc l'inertie effective des particules. Cela indique qu'il existe une limite invariante combinant grandes échelles d'observation et petite inertie et cela, quand bien même l'écoulement est dénué d'invariance d'échelle.

Il y a plusieurs extensions de ce modèle qui sont nécessaires pour obtenir une information plus quantitative sur la distribution de particules dans des écoulements réels. L'amélioration la plus significative est de donner une structure spatiale au champ de vitesse. Ceci peut être fait en introduisant une

corrélation spatiale entre les vorticités de différentes cellules. On peut faire le choix d'étudier cette question en prenant la limite continue du modèle discret décrit ci-dessus. Dans cet esprit, en collaboration avec R. Bitane et G. Krstulovic, nous avons généralisé les travaux de [BC07] au cas d'un espace-temps continu [KBB12]. Le mouvement des particules est alors décrit en termes de diffusion dans un milieu aléatoire fluctuant et la distribution des particules développe le même type d'hétérogénéités que nous avons pu caractériser en fonction des propriétés de l'environnement.

De façon plus précise, considérons le réseau périodique de dimension d dont les cellules ont une taille Δx et de période $L = N\Delta x$. On associe alors la dynamique discrète suivante. La cellule indexée par i contient au temps $n\Delta t$ une masse $m_i(n)$. Entre les temps $n\Delta t$ et $(n+1)\Delta t$, une fraction $0 < \gamma_i(n) < 1/(2D)$ de cette masse éjectée depuis la cellule i vers l'une de ses $2d$ voisines. Pour un ensemble donné $\{\gamma_i(n)\}_{i \in \{1, \dots, N\}^d}$ de taux d'éjection, les variables $\{\rho_i(n)\}_{i \in \{1, \dots, N\}^d}$ définissent une chaîne de Markov dont l'équation maîtresse est donnée par

$$\rho_i(n+1) = [1 - 2d\gamma_i(n)]\rho_i(n) + \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \gamma_j(n)\rho_j(n), \quad (1.64)$$

où \mathcal{N}_i désignent les cellules voisines de i . Il est clair que grâce aux conditions de bord périodiques, la masse totale $M = \sum_i \rho_i$ est conservée. L'équation (1.64) généralise le modèle considéré précédemment aux processus d'éjection de masse dans un environnement non-homogène dépendant du temps déterminé par les taux d'éjection $\gamma_i(n)$. Le cas discuté précédemment correspond à celui où les taux d'éjection ne prennent que deux valeurs, γ et 0, et sont décorrélés en espace et en temps.

Considérons maintenant la limite continue $\Delta x \rightarrow 0$ et $\Delta t \rightarrow 0$ de (1.64). Pour cela, on suppose que le rapport $\Delta x^2/\Delta t$ est maintenu constant. On désigne par $\Gamma\sigma^2(\mathbf{x}, t)$ la limite continue de $\gamma_{\mathbf{x}/\Delta x}(t/\Delta t)$, où le coefficient Γ est l'amplitude typique du taux d'éjection et σ est une fonction d'ordre un continue en temps et en espace. Dans cette limite, (1.64) devient

$$\partial_t \rho(\mathbf{x}, t) = \Gamma \nabla^2 [\sigma^2(\mathbf{x}, t)\rho(\mathbf{x}, t)]. \quad (1.65)$$

Contrairement au cas d'une équation de diffusion standard provenant de la première loi de Fick, l'opérateur différentiel $\nabla^2[\sigma^2(\mathbf{x}, t) \cdot]$ apparaissant dans le membre de droite de (1.65) n'est pas défini positif. Il n'y a pas de principe de maximum et on s'attend à ce que la solution se comporte de manière très différente de celle des équations de diffusion classiques.

L'équation (1.65) est l'équation de Fokker-Planck associée à la diffusion de Itô

$$d\mathbf{X}_t = \sqrt{2\Gamma} \sigma(\mathbf{X}_t, t) d\mathbf{W}_t, \quad (1.66)$$

où \mathbf{W}_t est le processus de Wiener de dimension d . Pour $t > s$, on définit la probabilité de transition (directe)

$$p(\mathbf{x}, t | \mathbf{y}, s) = \langle \delta(\mathbf{X}_t - \mathbf{x}) | \mathbf{X}_s = \mathbf{y} \rangle, \quad (1.67)$$

où $\langle \cdot \rangle$ désigne les moyennes par rapport aux réalisations de \mathbf{W}_t . Les solutions de (1.65) sont alors données pour $t > s$ par

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \int p(\mathbf{x}, t | \mathbf{y}, s) \rho(\mathbf{y}, s) d\mathbf{y}. \quad (1.68)$$

Le modèle donné par (1.65) peut alors être réinterprété en termes de marche aléatoire dans un environnement aléatoire (RWRE).

Il reste maintenant à spécifier les propriétés statistiques de l'environnement. On suppose que $L = 2\pi$ et que $\sigma(\mathbf{x}, t)$ est 2π -périodique en espace. L'environnement est alors entièrement déterminé par ses modes de Fourier

$$\sigma(\mathbf{x}, t) = \sum_{|\mathbf{k}|} a_{\mathbf{k}} \chi_{\mathbf{k}}(t/\tau_{\mathbf{k}}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}, \quad (1.69)$$

où les $a_{\mathbf{k}}$ sont des amplitudes réelles positives et les $\tau_{\mathbf{k}}$ sont des temps caractéristiques dépendant de l'échelle. Les modes de Fourier $\chi_{\mathbf{k}}$ sont des processus gaussiens indépendants de variance unité et de temps de corrélation unité (on a choisi par exemple des processus d'Ornstein-Uhlenbeck). Les amplitudes $a_{\mathbf{k}}$ permettent de prescrire les propriétés d'invariance d'échelle de l'environnement. En choisissant $a_{\mathbf{k}} = \frac{1}{2} k^{-1/2-h}$, on obtient $|\sigma(\mathbf{x} + \mathbf{r}) - \sigma(\mathbf{x})| \sim |\mathbf{r}|^h$, où l'exposant $0 \leq h \leq 1$ est l'exposant de Hölder du taux d'éjection. L'invariance d'échelle temporelle vient du choix $\tau_{\mathbf{k}} = k^{-\beta}$ avec $\beta > 0$. L'exposant β relie la dépendance temporelle à l'invariance d'échelle spatiale; $\beta = 0$ correspond à un temps de corrélation unique pour σ et $\beta \rightarrow \infty$ au bruit blanc.

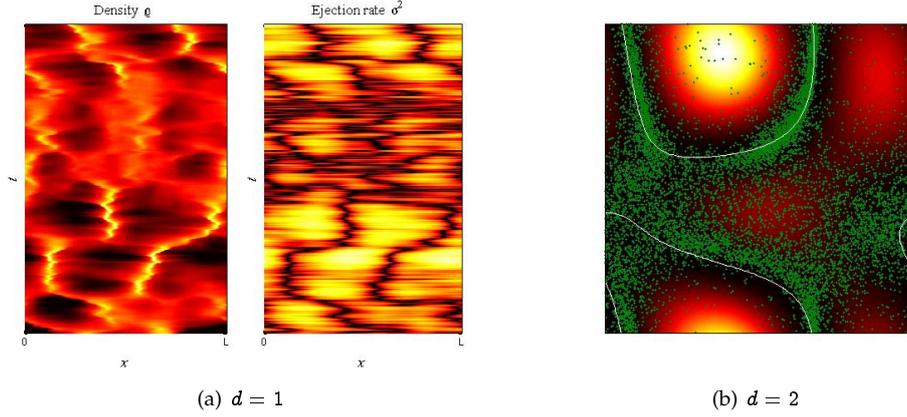


FIGURE 1.17 – (a) Gauche : diagramme spatio-temporel de la densité de particules $\rho(x, t)$ (fortes densités en jaune et faibles en noir) en dimension un. Droite : évolution correspondante du taux d'éjection $\sigma^2(x, t)$. (b) Instantané de la position de particules satisfaisant la dynamique (1.66) (en vert) pour $d = 2$; le champ $\sigma^2(x, t)$ est représenté en arrière plan (les valeurs faibles sont en noir et élevées en jaune ; les contours $\sigma = 0$ apparaissent en blanc).

La Figure 1.17(a) montre l'évolution temporelle de la densité et du taux d'éjection pour une réalisation typique en dimension $d = 1$. La Figure 1.17(b) montre un instantané de l'environnement σ et de la position de particule satisfaisant (1.66) pour $d = 2$. Il est clair de ces figures que les zones de forte densité sont situées au voisinage des zéros de $\sigma^2(x, t)$. La distribution et l'évolution temporelle des zéros dépend fortement du paramètre h qui caractérise l'environnement. Lorsque h est grand, on voit sur la Fig. 1.17(a) que les zéros apparaissent par paires et diffusent jusqu'à fusionner avec un autre zéro. Pour $h < 1$, les propriétés d'invariance de l'environnement aléatoire changent ce comportement. Le temps de corrélation de σ à l'échelle ℓ est $\tau_C(\ell) = (\ell/L)^\beta$. Le temps de diffusion associé se comporte comme $\tau_D(\ell) = \ell^2/(\Gamma\delta\sigma_\ell^2) \sim \Gamma^{-1}L^{2h}\ell^{2-2h}$. Le rapport $\text{Ku}(\ell) = \tau_C(\ell)/\tau_D(\ell) \simeq \Gamma L^{-(2h+\beta)}\ell^{\beta+2h-2}$ définit un paramètre sans dimension qui dépend de l'échelle. Pour $\text{Ku}(\ell) \gg 1$, tout se passe comme si l'environnement était gelé. Pour $\text{Ku}(\ell) \ll 1$, il fluctue d'une façon quasi-décorrélée en temps. Lorsque $\beta \neq 2 - 2h$, ces considérations font qu'une possible invariance d'échelle de la distribution de masse est brisée. Il n'y a que lorsque $\beta = 2 - 2h$ qu'une telle propriété est possible : on a alors $\text{Ku}(\ell) = \text{Ku} = \Gamma/L^2$ qui est indépendant de l'échelle.

Dans [KBB12], nous avons obtenu des résultats analytiques sur la densité de probabilité de la densité de masse ρ dans le cas d'un environnement stationnaire. Nous avons notamment montré qu'elle se comporte comme une loi de puissance aux grandes valeurs avec un exposant -2 , i.e. $p(\rho) \sim \rho^{-2}$. Cette loi provient du voisinage des zéros de l'environnement. Dans le cas général non-stationnaire, il y a une compétition entre le piégeage par les zéros du taux d'éjection et le mélange dû à sa dépendance temporelle. Nous avons montré que les grandes fluctuations de la densité de masse impliquent pour Γ grand une loi de puissance $p(\rho) \sim \rho^{-3/2}$ qui apparaît comme une asymptotique intermédiaire et est suivie d'une coupure exponentielle. Nous avons finalement étudié les propriétés d'échelle de la masse en introduisant une densité moyennée sur une échelle ℓ . Cette densité moyennée est invariante d'échelle dans le cas d'environnements lisses ($h = 1$). Dans le cas non lisse, elle possède des propriétés d'échelle aux grandes masses qui dépendent de l'échelle ℓ d'observation, de l'amplitude Γ du taux d'éjection et de l'exposant de Hölder h . La dynamique de ce modèle contient plusieurs échelles spatiales et temporelles. La masse s'accumule rapidement au voisinage de zéros du taux d'éjection et se déplace ensuite lentement pour suivre la diffusion de ces derniers. Selon les paramètres du modèle, il y a aussi une séparation d'échelle claire entre les fluctuations de masse à petite échelle et celles à des échelles correspondant à la séparation typique entre zéros. Cette séparation d'échelle suggère d'utiliser les méthodes traditionnelles d'homogénéisation pour déterminer un tenseur de diffusion effectif à grande échelle.

Pour conclure, il est important de souligner que les zéros de l'environnement jouent un rôle crucial à la fois pour les propriétés diffusives du modèle et les fluctuations de la distribution de masse. Ils sont responsables de l'accumulation de la masse et, en même temps, sont des barrières au transport. Cette dualité implique que les détails statistiques fins de tels systèmes dépendent de façon sensible des caractères de ces zéros et en particulier de la structure du taux d'éjection dans leur voisinage. Nous nous sommes concentrés sur des taux d'éjection qui peuvent s'écrire comme le carré d'une fonction générique aléatoire gaussienne. Ce choix n'est pas toujours pertinent et il peut sembler parfois mieux approprié d'écrire le taux d'éjection comme l'exponentielle d'une fonction aléatoire. Ce changement aurait un impact important sur la majeure partie des résultats décrits dans [KBB12].

1.2.4 Concentrations de particules en turbulence MHD

De nombreuses applications naturelles et industrielles impliquent le transport de particules bien plus lourdes que le plasma sous-jacent. En astrophysique, des grains de poussière sont suspendus dans le milieu interstellaire [YL03] ou dans les nuages moléculaires [FdJ03]. Bien qu'elle ne constitue généralement qu'une petite fraction de la matière, cette poussière joue un rôle clef dans de nombreux processus, comme par exemple le réchauffement ou le refroidissement des plasmas interstellaires ou intergalactiques [TP02, MG04]. La poussière permet aussi de détecter les champs de vitesse et les champs magnétiques et leurs propriétés turbulentes [CHT03, HGOB08]. Les grains de poussières interviennent aussi dans les disques protoplanétaires lors de la formation des planètes [FP06], dans l'interaction des comètes avec le vent solaire [dSZG07] et dans la modification du spectre de Kolmogorov des ondes d'Alfvén faiblement turbulentes de l'ionosphère [OPS⁺03]. Dans l'industrie, les plasmas de fusion contiennent une population significative de particules lourdes chargées qui proviennent pour l'essentiel de l'érosion des parois par le plasma [TVB99, Rog05, PKSR05, RSP08]. La compréhension de la dynamique de la poussière dans ce contexte permettrait non seulement de quantifier l'effet des impuretés mais aussi de mieux contrôler leur déposition en exploitant le fait que leur interaction avec les ondes puissent augmenter leur frottement visqueux de plusieurs ordres de grandeur [deA06].

Dans ces situations, les particules qui constituent la poussière ont de l'inertie et il est donc légitime de comprendre le phénomène de concentration préférentielle dans un contexte de turbulence magnétohydrodynamique (MHD). Le processus d'éjection des structures en rotation par force centrifuge est suffisamment universel pour s'attendre à ce qu'il soit aussi présent dans ce cas. Il est toutefois bien connu qu'en turbulence MHD, les zones de fort cisaillement sont caractérisées par la présence de nappes de vorticité et de courant où la vitesse du fluide subit de très fortes fluctuations [Bis03]. En conséquence les

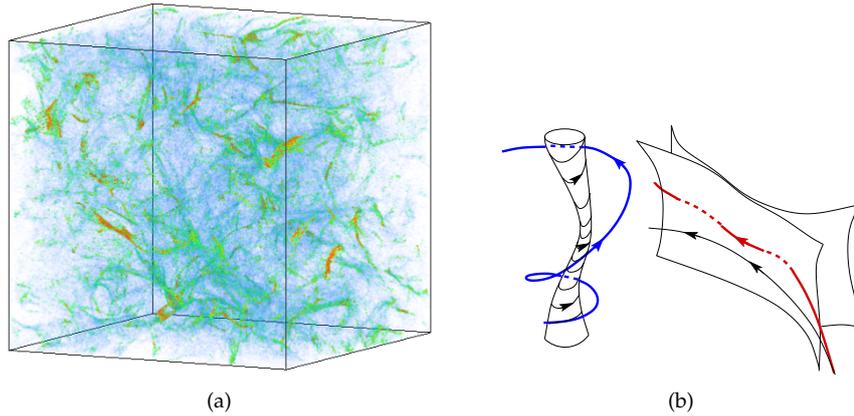


FIGURE 1.18 – (a) Densité de particules lourdes en turbulence MHD (bleue : faible densité ; rouge : forte densité). (b) Schéma du mouvement d'une particule lourde (ligne grasse) dans un filament de vorticité (gauche) et dans une nappe de vorticité (droite) ; les trajectoires de traceurs sont représentées par des lignes noires fines.

particules ont tendance à se concentrer au voisinage de ces nappes, comme cela a déjà été observé dans des simulations MHD anisotropes à des nombres de Reynolds magnétique faibles [RKM⁺08]. Dans des situations statistiquement isotropes, nous avons confirmé dans [HBFG09] une telle observation. Nous voyons en effet sur la Fig. 1.18(a) que des structures en feuille sont présentes dans la distribution spatiale instantanée de particules électriquement neutres dans une simulation numérique directe. Cette concentration des particules dans les régions les plus actives de l'écoulement contraste avec ce qui se passe en turbulence hydrodynamique où les particules sont éjectées des structures cohérentes (voir schéma de la Fig. 1.18(b) : Cela implique une différence dans les mécanismes en jeu dans de telles suspensions. Nous allons par exemple voir que les concentrations aux échelles inertielles sont dominées par les processus de concentration plutôt que ceux d'éjection, ce qui donne de plus fortes fluctuations dans la distribution de masse.

Nous considérons dans cette section un fluide électriquement conducteur dont la dynamique est donnée par les équations de la MHD

$$\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} - \nabla p + \mathbf{f} + \nu \nabla^2 \mathbf{u}, \quad (1.70)$$

$$\partial_t \mathbf{B} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \gamma + \eta_d \nabla^2 \mathbf{B}, \quad (1.71)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (1.72)$$

où \mathbf{u} est le champ de vitesse du fluide et \mathbf{B} est le champ magnétique. ν et η_d sont respectivement la viscosité cinématique et la diffusivité magnétique. \mathbf{f} et γ sont des forces qui maintiennent le système

dans un état statistiquement stationnaire. Il n’y a pas de champ magnétique moyen $\langle \mathbf{B} \rangle = 0$, de telle sorte que la turbulence est statistiquement isotrope. Le champ électrique \mathbf{E} est donné par la loi d’Ohm

$$\mathbf{E} = \eta_d \nabla \times \mathbf{B} - \mathbf{u} \times \mathbf{B}. \quad (1.73)$$

Dans cet écoulement, nous considérons des particules ponctuelles sphériques bien plus lourdes que le fluide porteur, de telle sorte qu’elles interagissent avec le fluide par un frottement visqueux. Quand de plus ces particules sont uniformément chargées, avec une densité ρ_c , elle sont sujettes à la force de Lorentz. Leurs trajectoires $\mathbf{X}(t)$ sont ainsi des solutions de l’équation de Newton

$$\ddot{\mathbf{X}} = \frac{1}{\tau} [\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) - \dot{\mathbf{X}}] + \frac{1}{\ell} [\mathbf{E}(\mathbf{X}, t) + \dot{\mathbf{X}} \times \mathbf{B}(\mathbf{X}, t)], \quad (1.74)$$

avec $\tau = 2\rho_p a^2 / (9\rho_f \nu)$ et $\ell = \rho_p c / (\rho_c \sqrt{4\pi\rho_f})$ (ρ_p et ρ_f sont respectivement les densités de masse des particules et du fluide). Le premier terme dans le membre de droite fait apparaître le temps de Stokes τ . Son importance est mesurée par le nombre de Stokes $St = \tau / \tau_\eta$ où, comme en turbulence hydrodynamique, $\tau_\eta = \sqrt{\nu/\varepsilon}$ est le temps dissipatif de Kolmogorov. Le second terme dans le membre de droite de (1.74) implique l’échelle ℓ qui mesure l’importance de la force de Lorentz exercée par les champs électrique et magnétique du fluide. Par analogie avec le nombre de Stokes, nous introduisons un nombre adimensionnel de Lorentz défini comme $Lo = \tau B_{\text{rms}} / \ell$ (où B_{rms} est l’écart type du champ magnétique). Contrairement à St , ce nombre fait intervenir une quantité à grande échelle, B_{rms} , parce que le produit vectoriel fait apparaître une nonlinéarité quadratique dans la force de Lorentz. Ce nombre peut s’écrire $Lo = (4\sqrt{\pi}/9) B_{\text{rms}} \rho_c a^2 / (c\nu\sqrt{\rho_f})$ et mesure l’effet relatif de la force de Lorentz par rapport au frottement visqueux. Lorsque $Lo \ll 1$, celle-ci est négligeable et l’inertie domine. Quand $Lo \gg 1$, la force de Lorentz domine la dynamique des particules.

Les particules sont passives. D’une part, il est supposé que leur charge ne modifie pas le mouvement du fluide (ce qui requiert qu’elles soient faiblement chargées) et, d’autre part, on néglige leur effet collectif sur l’écoulement (elles sont suffisamment diluées pour que leurs effets hydrodynamiques et électromagnétiques sur le fluide porteur puissent être omis). Nous avons effectué des simulations numériques de (1.70) en utilisant un solveur pseudo-spectral et intégré en parallèle dans l’écoulement les trajectoires de particules associées à $Lo = 0$ et 12 valeurs différentes de St et $St = 1$ fixé et 8 valeurs de Lo . Ceci nous a permis de quantifier les propriétés de concentration des particules en fonctions de ces deux paramètres sans dimension qui caractérisent leur dynamique.

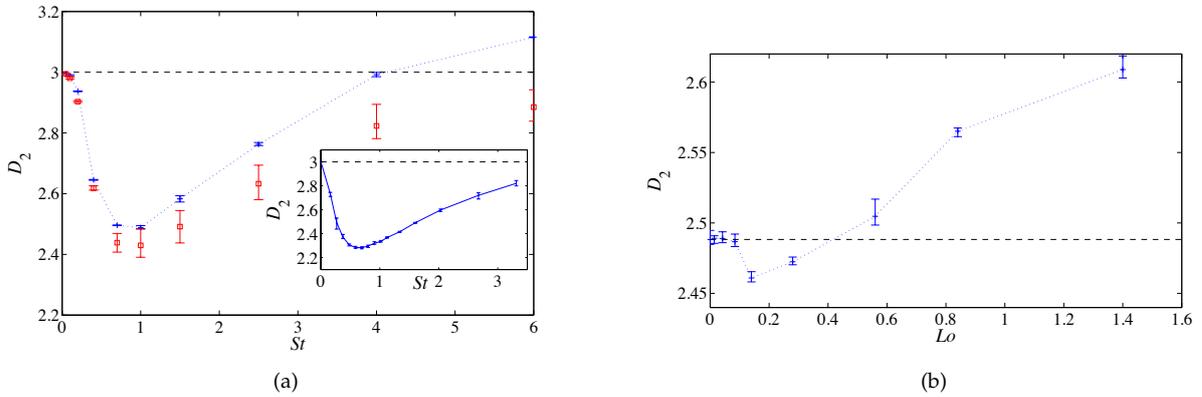


FIGURE 1.19 – (a) Dimension de corrélation de la distribution de particules électriquement neutres ($Lo = 0$) en fonction du nombre de Stokes. \square : dimension spatiale \mathcal{D}_2 mesurée directement; $+$: dimension de corrélation dans l’espace des phases \mathcal{D}_2 . Encart : idem pour la turbulence hydrodynamique (d’après[BBC⁺07]). (b) Dimension de corrélation de la distribution de particules pour $St = 1$ et en fonction du nombre de Lorentz.

Aux échelles dissipative de l’écoulement, la distribution des particules est multifractale et caractérisée par son spectre de dimension. Nous nous sommes concentré sur la dimension de corrélation $\bar{\mathcal{D}}_2$ (voir section 1.1). La figure 1.19(a) représente le comportement de celle-ci en fonction du nombre de Stokes pour des particules neutres ($Lo = 0$). Comme on le voit dans l’encart de la figure, le comportement de la dimension en fonction du nombre de Stokes est très similaire à ce qui est observé dans les écoulements purement hydrodynamiques. La différence essentielle est une homothétie de l’axe horizontal et vient donc d’une définition du nombre de Stokes qui implique la valeur typique du gradient de vitesse. Dans le cas MHD, le gradient le long des trajectoires des particules est plus élevé que sa moyenne spatiale et c’est l’inverse dans le cas hydrodynamique. Ceci pourrait expliquer une différence dans le nombre de Stokes effectivement ressenti par les particules.

La figure 1.19(b) représente la dimension de corrélation des particules chargées. Pour avoir un effet visible, le nombre de Lorentz doit dépasser un certain seuil. Au delà de ce seuil, la charge des particules conduit à une augmentation de la concentration, et donc à une plus petite valeur de \bar{D}_2 . Comme nous le verrons par la suite, ceci peut s'expliquer par la sélection préférentielle de certaines nappes lorsque les particules sont chargées. Au contraire, aux plus grandes valeurs du nombre de Lorentz, la concentration des particules faiblit de façon significative. Ceci peut s'expliquer par le fait que la source principale de concentration vient de la force de rappel qui devient là de moins en moins forte par rapport à la force de Lorentz.

Essayons de mieux comprendre les effets de la charge sur les propriétés de concentration. Alors que les particules neutres se concentrent au voisinage de n'importe quelle nappe de courant/vorticité, les particules chargées se concentrent seulement sur un sous-ensemble de celles-ci. En effet, la force de Lorentz fait que certaines nappes sont attractives et d'autres repulsives. Généralement, la vitesse des particules lourdes est plus faible que celle du fluide à leur position. Les particules chargées positivement sont ainsi attirées vers les nappes où $\omega \cdot \mathbf{B} > 0$. La figure 1.20(a) représente la densité de probabilité de ce produit scalaire le long des trajectoires de particules neutres et chargées ayant le même nombre de Stokes. On observe que la distribution est penchée vers les valeurs négatives.

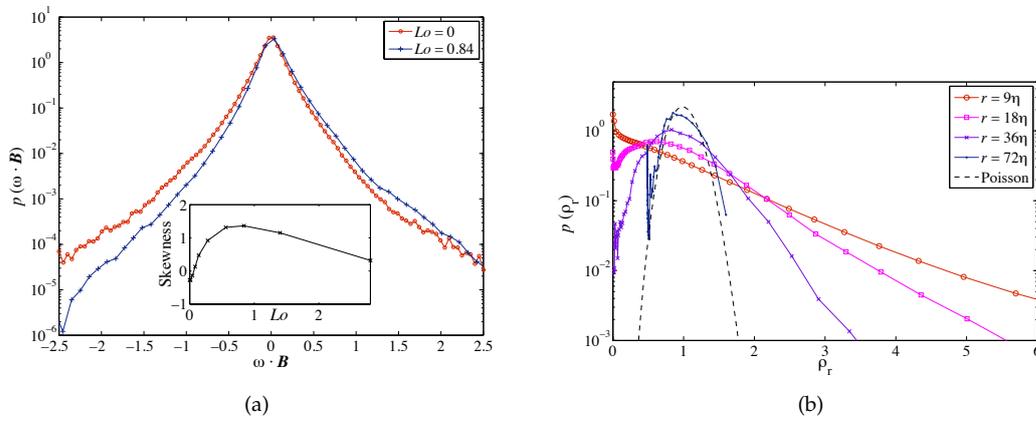


FIGURE 1.20 – (a) Densité de probabilité du produit scalaire $\omega \cdot \mathbf{B}$ échantillonné le long des trajectoires de particule. Encart : coefficient d'asymétrie S de $\omega \cdot \mathbf{B}$. (b) Densité de probabilité de la densité de masse de particules moyennée sur différentes échelles r pour des particules neutres ($Lo = 0$) et $St = 1$.

Une mesure quantitative de la sélection préférentielle de certaines nappes est donnée par le coefficient d'asymétrie (« skewness ») $\langle (\omega \cdot \mathbf{B})^3 \rangle / \langle (\omega \cdot \mathbf{B})^2 \rangle^{3/2}$ du produit scalaire $\omega \cdot \mathbf{B}$. Comme on le voit dans l'encart de la Fig. 1.20(a), une asymétrie maximale est atteinte pour $Lo \simeq 1$. Au delà de cette valeur, la sélection préférentielle s'affaiblit. Ceci peut être lié à une décroissance du rayon de Larmor ($\simeq 4\eta$ pour $Lo = 0.84$), vu que l'argument présenté pour l'attraction et la repulsion n'est valable que pour des rayons de Larmor bien plus grands que l'échelle de Kolmogorov.

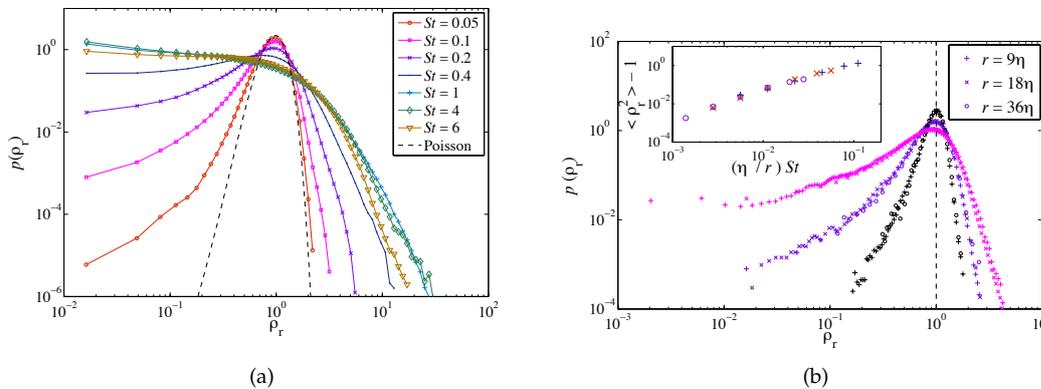


FIGURE 1.21 – (a) Densité de probabilité de la densité de masse de particules moyennée sur une échelle $r = 18\eta$ fixée et différents nombres de Stokes. (b) Distribution de probabilité de la densité moyennée de particules pour trois valeurs différentes du facteur de contraction $\Gamma = (\eta/r) St$ (distribution la plus large : $\Gamma \simeq 0.07$, intermédiaire $\Gamma \simeq 0.024$ et la plus étroite : $\Gamma \simeq 0.006$). Encart : déviations par rapport à une distribution uniforme de la variance de la densité moyennée en fonction de Γ .

Par analogie avec le cas purement hydrodynamique, nous nous intéressons maintenant à la distribu-

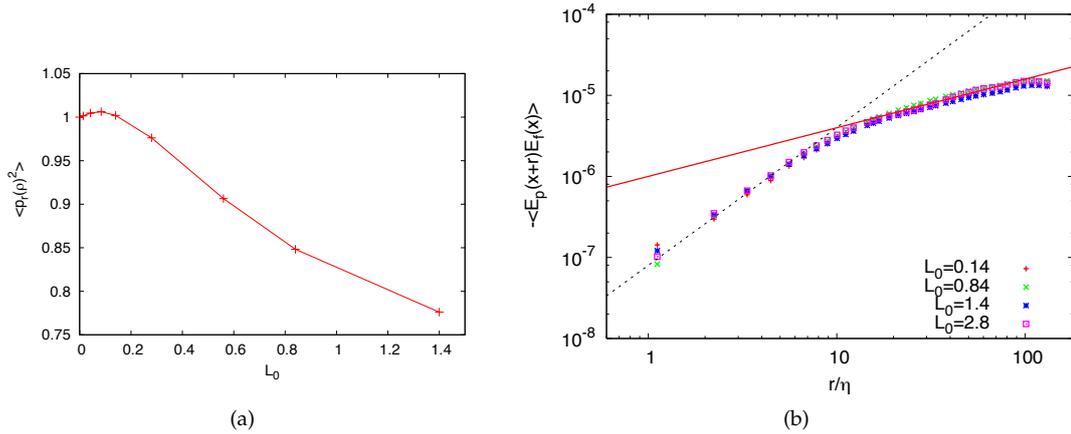


FIGURE 1.22 – (a) Moment du second ordre de la densité moyennée à une échelle $r = 18\eta$ en fonction du nombre de Lorentz Lo . La courbe est normalisée par la valeur associée à $Lo = 0$. (b) Corrélation entre le champ électrique du fluide E_f et celui induit par les particules : la ligne en tirets noirs correspond à une pente 0.6 et celle continue rouge à une pente 1.7.

tion des particules aux échelles inertielles de la turbulence MHD. La figure 1.20(b) représente différentes densités de probabilité de la densité de masse moyennée ρ_r pour un nombre de Stokes fixé et r variant dans les échelles inertielles. On observe que les déviations d'une distribution uniforme sont maximales aux petites échelles et que la distribution s'approche du cas uniforme lorsque r augmente. Aux échelles intermédiaires, les deux queues asymptotiques de la distribution sont bien plus développées que dans le cas uniforme. La queue aux grandes valeurs décroît de façon exponentielle (ou moins rapide). Ceci est très différent du cas hydrodynamique, ce qui suggère une nature différente du processus de clustering dans le cas MHD. Le comportement aux petites masses est plus difficile à quantifier. Comme nous le voyons sur la Fig. 1.21(a), il semble avoir un comportement en loi de puissance mais les données semblent contaminées par un plateau lié au nombre limité de particules dans les simulations. Cet effet n'était pas visible dans les simulations hydrodynamiques où un plus grand nombre de particules était utilisé et une loi de puissance pouvait clairement être identifiée.

Comme nous le voyons sur la Fig. 1.21(a), on retrouve aussi une distribution uniforme si au lieu d'augmenter r en gardant St constant, on fixe r et diminue St . Cela suggère un mécanisme identique au cas purement hydrodynamique de la section 1.2.2 pour lequel nous avons vu que la distribution de masse a des propriétés d'invariance d'échelle. Dans le cas de particules électriquement neutres, on peut utiliser l'approximation de [Max87] dans la limite $St \ll 1$ pour écrire la dynamique des particules en termes d'un champ de vitesse effectif

$$\dot{\mathbf{X}} \simeq \mathbf{v}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) - \tau(\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u})(\mathbf{X}, t). \quad (1.75)$$

Comme dans le cas hydrodynamique, on introduit alors le taux $\gamma(\tau, r)$ auquel un blob de particules de taille r se contracte lorsqu'il est advecté par cet écoulement synthétique compressible. On a

$$\gamma = \frac{1}{r^3} \int_{|\mathbf{x}| < r} \nabla \cdot \mathbf{v} \, d^3 \mathbf{x} = -\frac{\tau}{r^3} \int_{|\mathbf{x}| < r} \nabla \cdot (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) \, d^3 \mathbf{x}. \quad (1.76)$$

En utilisant le théorème de la divergence, l'intégrale volumique apparaissant dans le membre de droite peut se réécrire comme une intégrale surfacique sur $|\mathbf{x}| = r$ de $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$. Si le blob chevauche une nappe de courant/vorticité, la vitesse subit quasiment un saut. Ceci implique que l'intégrale de surface se comporte comme $\sim r^2 u_{\text{rms}}(u_\eta/\eta)$. En termes du nombre de Stokes, le taux de contraction du blob s'écrit alors $\gamma \sim St u_{\text{rms}}/r$ et est donc proportionnel au taux de contraction sans dimension $\Gamma = (\eta/r)St$. Cette approche prédit ainsi que dans les limites $St \rightarrow 0$ ou $r/\eta \rightarrow \infty$, la distribution des particules aux échelles inertielles ne dépend que de $\Gamma = (\eta/r)St \ll 1$. Comme on peut le voir sur la Fig. 1.21(b), les résultats numériques sont en accord avec ce comportement.

Les propriétés d'échelle que nous venons d'écrire dans le cas neutre ne s'étendent pas au cas où les particules sont chargées. La présence de la force de Lorentz empêche l'utilisation d'une approximation équivalente à (1.75) pour étudier le problème et expliciter un taux de contraction effectif. Toutefois, l'influence qualitative de la charge que nous avons décrite ci-dessus reste valable aux échelles inertielles. La Figure 1.22(a) confirme la tendance d'une augmentation de la concentration aux petites charges suivie d'une diminution aux charges plus grandes.

Pour conclure cette section, rappelons que les particules que nous avons considérées sont purement passives ; elles n'ont ainsi aucune influence sur l'écoulement porteur. Pour estimer leur influence potentielle, nous avons mesuré le champ électrique \mathbf{E}_p qu'elles produisent. Ce champ est bien sûr plus prononcé dans les zones de forte concentration. Il est orienté de manière à agir de façon opposée au champ extérieur \mathbf{E}_f dû aux charges de l'écoulement. Pour quantifier ces résultats, nous avons mesuré la corrélation $C(\mathbf{r}) = \langle \mathbf{E}_p(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \mathbf{E}_f(\mathbf{x}) \rangle$ et trouvé qu'elle est négative à toutes les échelles spatiales. Comme on peut le voir sur la Fig. 1.22(b), cette corrélation se comporte en fonction de la séparation comme une loi de puissance avec l'exposant 1.7 aux échelles dissipatives et 0.6 dans la gamme inertielle. L'origine de ces lois de puissance reste une question ouverte clairement liée aux propriétés de concentration des particules. Il semble essentiel d'inclure des interactions électriques entre les particules dès que celles-ci ne sont plus suffisamment diluées dans l'écoulement conducteur. Des forces électriques répulsives doivent clairement altérer à la fois les propriétés à petite et à grande échelle de la distribution spatiale des particules. Nous nous attendons toutefois à ce que le processus de sélection de certaines nappes de courant reste valable aux échelles inertielles.

Chapitre 2

Propriétés dynamiques des particules en suspension dans un écoulement turbulent

Comprendre de manière systématique les propriétés dynamiques d'impuretés dans un écoulement turbulent est un véritable défi qui en principe nécessite de résoudre le mouvement du fluide entourant les particules. Il n'y a que dans certaines asymptotiques que des modèles analytiques existent pour les forces exercées par le fluide sur une particule. Il faut notamment supposer que les particules sont bien plus petites que la plus petite échelle active de l'écoulement turbulent (échelle de Kolmogorov), de sorte que les interactions avec le fluide sont essentiellement à longue portée (comparées à la taille des impuretés), et que celles-ci se déplacent dans l'écoulement avec un faible nombre de Reynolds pour garantir que les interactions à courte portée soient fortement dissipées par la viscosité. Dans ce cadre, les impuretés peuvent être approximées par des particules ponctuelles et les forces s'exerçant sur elles sont la poussée d'Archimède, l'accélération du fluide non perturbé, la traînée visqueuse de Stokes, la masse ajoutée et le terme d'histoire de Basset–Boussinesq [Gat83, MR83].

Lorsque les particules sont bien plus lourdes que le fluide porteur, cette dynamique peut être encore simplifiée ; on ne retient alors que le frottement visqueux et les forces de gravité. Toutefois, même dans cette asymptotique assez restrictive, des comportements assez complexes ont lieu. Nous avons vu dans le chapitre précédent que de telles particules lourdes se concentrent de façon préférentielle dans l'écoulement et l'échantillonnent ainsi de façon inhomogène. Nous verrons dans la section 2.1 que cela a des implications sur les propriétés de vitesse et d'accélération de particules qui ne peuvent pas être trivialement déduites de celles du fluide. En particulier, nous montrons dans la section 2.1.1 que dans le cas de particules lourdes, leur concentration préférentielle et leur éjection des structures en rotation de l'écoulement a un impact fort sur les propriétés statistiques de leur accélération [BBB⁺06a]. La section 2.1.2 est elle consacrée à la comparaison des statistiques lagrangiennes de la vitesse des particules lourdes et de traceurs. Nous verrons notamment que les statistiques des traceurs sont fortement contaminées par un effet bouchon dû à leur capture dans les filaments de vorticité ; cet effet disparaît quand les particules ont de l'inertie et sont éjectées de telles structures [BBC⁺06]. Finalement, la concentration préférentielle des particules a aussi des conséquences sur la vitesse de sédimentation gravitationnelle des particules. Nous verrons dans la section 2.1.3 comment la turbulence tend à augmenter la vitesse de sédimentation des particules.

Toutefois ces travaux laissent de nombreuses questions ouvertes. Il est par exemple crucial de comprendre quelle est la limite de validité des hypothèses sur la petite taille des particules. Quelle est l'importance de l'effet retour des particules sur le fluide ? Comment se comportent des particules avec une taille aux échelles inertielles de l'écoulement et comment les propriétés du champ de vitesse du fluide sont-elles affectées par ces particules ? Les travaux décrits dans la section 2.2 tentent de répondre au moins partiellement à ces questions. En collaboration avec H. Homann, nous avons développé une méthode de pénalisation spectrale qui a l'avantage de combiner l'efficacité des méthodes spectrales pour simuler les écoulements dans un régime turbulent développé et la possibilité de prescrire des conditions de bord sur une inclusion quelconque. Même si l'on perd la précision spectrale au voisinage d'une paroi, on a pu montrer qu'une telle méthode est d'ordre $3/2$. Cette approche nous a permis d'effectuer des simulations directes de grosses particules dans des écoulements turbulents. La section 2.2.1 est consacrée

au cas d'une particule fixe dans un écoulement amont moyen constant. Une telle configuration permet de valider notre méthode et d'étudier la traînée, la poussée et le sillage d'une particule en fonction de son nombre de Reynolds et du niveau de turbulence de l'écoulement incident [HBM13]. Dans la section 2.2.2, nous nous intéressons au cas où les particules sont de flottabilité nulle (de même densité de masse que le fluide) et évoluent librement dans l'écoulement. On y montre la pertinence et les limites du modèle de Faxén pour des particules avec des diamètres de l'ordre de l'échelle de Kolmogorov [HB10]. Pour les particules dont les tailles sont aux échelles inertielles, nous proposons une définition de la vitesse de glissement basée sur le champ de vitesse dans des coquilles concentriques autour de la particule et utilisons des arguments dimensionnels pour tirer une analogie entre les modifications de l'écoulement autour de la particule et les écoulements de paroi turbulents [CHB13].

2.1 Accélération turbulente, vitesses lagrangiennes et sédimentation

Cette section est consacrée au cas de très petites particules bien plus lourdes que le fluide. Comme nous l'avons vu précédemment, leur dynamique est dans ce cas dominée par leur frottement visqueux avec le fluide et suit donc l'équation de Newton :

$$\frac{d\mathbf{V}_p}{dt} = -\frac{1}{\tau} [\mathbf{V}_p - \mathbf{u}(\mathbf{X}_p, t)], \quad (2.1)$$

où $\mathbf{V}_p = d\mathbf{X}_p/dt$ est la vitesse de la particule et τ son temps de réponse (ou temps de Stokes). Nous avons ici négligé l'effet de la gravité. L'inertie des particules est mesurée par le nombre de Stokes $St = \tau/\tau_\eta$ qui est généralement défini dans un contexte turbulent en adimensionnant le temps de réponse par le temps de retournement τ_η associé à l'échelle dissipative de Kolmogorov. Résoudre une telle dynamique nécessite en principe de connaître à chaque instant le champ de vitesse du fluide \mathbf{u} à la position de la particule. Dans les applications, comme par exemple les sciences de l'Univers ou bien l'ingénierie, on a souvent besoin de connaître des quantités moyennes globales plutôt que des trajectoires individuelles en fonction des paramètres caractérisant la situation à laquelle on s'intéresse. Pour cette raison, on a souvent recours à l'utilisation de modèles stochastiques (voir, par exemple, [SG91]) pour accéder à de telles informations.

L'accélération des particules est une quantité importante pour valider et améliorer de tels modèles. Nous avons effectué une étude numérique détaillée de la statistique de l'accélération [BBB⁺06a, CBB⁺06] qui est résumée dans la section 2.1.1. Nous avons montré que les valeurs typiques de l'accélération diminuent abruptement par rapport à celles du fluide dès les petits nombres de Stokes. Un autre résultat est la dépendance en nombre de Reynolds : pour toutes les valeurs du nombre de Stokes, l'accélération adimensionalisée des particules augmente avec le degré de turbulence de l'écoulement. Aussi, nous avons observé que les queues de la distribution de probabilité de l'accélération décroissent de plus en plus vite lorsque l'inertie des particules augmente. Deux mécanismes concurrents expliquent ces observations : les concentrations préférentielles de particules, très efficaces aux petits nombres de Stokes, et le filtrage induit par le temps de réponse des particules qui domine aux grandes valeurs du nombre de Stokes. Ces résultats sur la distribution d'accélération ont été confirmés par des travaux expérimentaux [AGC⁺06].

Nous avons aussi étudié les statistiques lagrangiennes de la vitesse en comparant les particules lourdes à des traceurs [BBC⁺06] dans des écoulements en turbulence homogène développée. Comme nous le verrons dans la section 2.1.2, les fonctions de structure lagrangiennes ont été mesurées pour des séparations temporelles couvrant près de trois décades, d'un dixième de temps de Kolmogorov à quelques temps de retournement à grande échelle. Nous avons obtenu de l'évidence numérique forte que les statistiques des traceurs sont fortement contaminées, pour des séparations allant de une à dix fois l'échelle dissipative, par un effet bouchon dû à la capture des trajectoires dans les filaments de vorticité. Cet effet est significativement réduit pour les particules lourdes qui sont éjectées de ces tourbillons par inertie. Ces résultats ont permis de clarifier les conclusions d'une étude expérimentale de H. Xu *et al.* [XBOB06] (voir aussi [ABB⁺08]), qui s'intéresse en particulier aux différences entre mesures numériques et expérimentales des propriétés d'échelle de traceurs fluides.

2.1.1 Propriétés statistiques de l'accélération

Nous présentons ici une étude basée sur des simulations numériques directes (DNS) du comportement de l'accélération des particules en fonction de leur nombre de Stokes et du nombre de Reynolds de l'écoulement porteur. Pour les traceurs, il est bien connu que le piégeage des trajectoires dans les filaments de vorticité [LPVC⁺01, BBC⁺05b] est la cause principale des fortes fluctuations de l'accélération.

Nous résumons les travaux de [BBB⁺06a] qui montrent que dans le cas de particules lourdes, leur concentration préférentielle et leur éjection des structures en rotation de l'écoulement change cette vision des statistiques de l'accélération.

Dans ce travail, les équations de Navier–Stokes sont intégrées par une méthode pseudo-spectrale sur une grille cubique de taille N^3 pour $N = 128, 256, 512$ avec des conditions de bord périodiques. Nous avons utilisé un algorithme pseudo-spectral, avec desaliasing complet et un schéma temporel de type Adam–Bashforth du second ordre. L'énergie est injectée dans l'écoulement en maintenant constant le contenu spectral des deux plus petites coquilles en nombre d'onde [CDKS93]. La viscosité est choisie de telle sorte que l'échelle dissipative de Kolmogorov soit de l'ordre du pas d'espace. Les nombres de Reynolds que nous avons atteints sont dans l'intervalle $R_\lambda \in [65 : 185]$. La dynamique du fluide est intégrée jusqu'à ce qu'elle atteigne un état statistiquement stationnaire. Des particules sont alors semées dans l'écoulement avec des nombres de Stokes $St = \tau/\tau_\eta$ allant de 0.16 à 3.5. Après un régime transitoire d'environ trois temps de retournement à grande échelle, leur dynamique atteint elle aussi un régime stationnaire et l'étude statistique est initialisée.

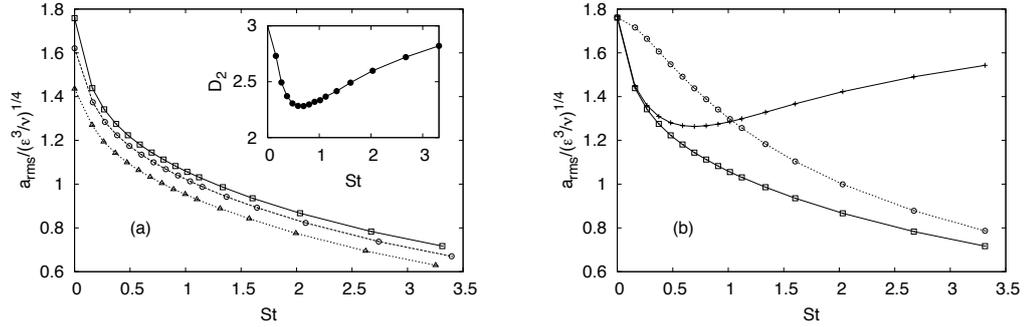


FIGURE 2.1 – (a) Variance normalisée de l'accélération $a_{rms}/(\epsilon^3/\nu)^{1/4}$ en fonction du nombre de Stokes St pour $R_\lambda = 185$ (\square); $R_\lambda = 105$ (\circ); $R_\lambda = 65$ (\triangle). La distribution inhomogène de particule est quantifiée pour la plus grande valeur du nombre de Reynolds dans l'encart, où la dimension de corrélation D_2 est représentée en fonction de St . (b) Comparaison entre la variance de l'accélération a_{rms} (\square), en fonction du nombre de Stokes et l'accélération des traceurs du fluide mesurée à la position des particules $\langle (Du/Dt)^2 \rangle^{1/2}$ ($+$). La dernière courbe (\circ), qui s'approche de a_{rms} pour les grandes valeurs de St , est obtenue à partir des trajectoire de traceurs filtrées a_{rms}^F . Toutes les données correspondent à $R_\lambda = 185$.

Nous nous concentrons dans cette section sur les statistiques de l'accélération $\mathbf{a}(t) = d\mathbf{V}_p/dt$. Un bon point de départ pour comprendre son comportement est donné par la solution formelle de l'équation de Stokes pour le mouvement des particules lourdes (2.1) dans le régime statistiquement stationnaire. Elle permet d'exprimer la vitesse instantanée d'une particule en fonction de l'histoire de la vitesse du fluide le long de sa trajectoire :

$$\mathbf{V}_p(t) = \frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^t e^{-(t-s)/\tau} \mathbf{u}(\mathbf{X}_p(s), s) ds. \quad (2.2)$$

Pour l'accélération, elle conduit à

$$\mathbf{a}(t) = \frac{1}{\tau^2} \int_{-\infty}^t e^{-(t-s)/\tau} [\mathbf{u}(\mathbf{X}_p(t), t) - \mathbf{u}(\mathbf{X}_p(s), s)] ds. \quad (2.3)$$

Il est alors instructif de regarder séparément les deux asymptotiques des petites et grandes valeurs du nombre de Stokes.

Pour St petit, i.e. $\tau \ll \tau_\eta$, la vitesse du fluide le long de la trajectoire évolue de façon régulière en temps et l'expression ci-dessus se réduit à $\mathbf{a}(t) \simeq \frac{d}{dt} \mathbf{u}(\mathbf{X}_p(t), t)$. Pour les valeurs de St suffisamment petites, celle-ci est indiscernable de l'accélération du fluide $(Du/Dt)(\mathbf{X}(t), t)$ évaluée aux positions des particules. Ceci implique donc qu'aux petits nombres de Stokes, l'accélération des particules lourdes coïncide avec celle du fluide. Toutefois les particules inertielles ne sont pas distribuées de manière homogène dans l'écoulement mais sont concentrées dans les zones avec une relativement faible valeur du gradient de pression. En conséquence, l'effet de l'inertie est une réduction importante de l'écart-type de l'accélération $a_{rms} = \langle \mathbf{a}^2 \rangle^{1/2}$, due pour l'essentiel à la concentration préférentielle. En effet, comme on le voit sur la Fig. 2.1(a), la variance de l'accélération décroît abruptement aux valeurs relativement faibles de St . Sur la Fig. 2.1(b), nous montrons que les valeurs mesurées de a_{rms} sont très proches pour $St < 0.4$ de $\langle [(Du/Dt)(\mathbf{X}(t), t)]^2 \rangle^{1/2}$.

Pour St grand, i.e. $\tau \gg \tau_\eta$, l'équation (2.3) montre que l'effet principal de l'inertie est un filtrage passe-bas des différences de vitesse du fluide, avec une suppression de hautes fréquences au dessus

de τ^{-1} . Sur la figure 2.1(b) nous comparons aussi la variance de l'accélération avec celle obtenue par un filtre passe-bas artificiel des trajectoires de traceurs. Pour chaque trajectoire de traceur $\mathbf{X}(t)$ telle que $d\mathbf{X}/dt = \mathbf{u}(\mathbf{X}, t)$, nous définissons une nouvelle vitesse \mathbf{u}^F par

$$\mathbf{u}^F(t) = \frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^t e^{-(t-s)/\tau} \mathbf{u}(\mathbf{X}(s), s) ds \quad (2.4)$$

L'accélération filtrée est alors donnée par $\mathbf{a}^F = d\mathbf{u}^F/dt$. L'écart-type $a_{\text{rms}}^F = \langle (\frac{d}{dt} \mathbf{u}^F)^2 \rangle^{1/2}$ est alors calculé en moyennant le long des trajectoires des traceurs sans aucun conditionnement sur leur position spatiale. Les courbes correspondant à a_{rms} et a_{rms}^F deviennent de plus en plus proches aux grandes valeurs de St . Ceci confirme un rôle de moins en moins important de la concentration préférentielle des particules lorsque l'inertie augmente. Aux valeurs intermédiaires de St , nous observons un comportement transitoire entre ces deux mécanismes qui rend très difficile le développement d'un modèle même qualitatif.

Un autre aspect intéressant montré sur la Fig. 2.1(a) est la dépendance résiduelle en nombre de Reynolds de l'accélération normalisée des particules. Dans le cas de traceurs, il est bien connu que les corrections intermittentes à l'estimation dimensionnelle $a_{\text{rms}} = a_0(\epsilon^3/\nu)^{1/4}$ peuvent expliquer la dépendance en nombre de Reynolds [Hil02, SYB⁺03, BBC⁺04]. Les données suggèrent que l'intermittence du fluide puisse aussi être responsable de telles déviations pour $St > 0$. Cette idée est en accord avec le fait que les trois courbes soient quasiment parallèles.

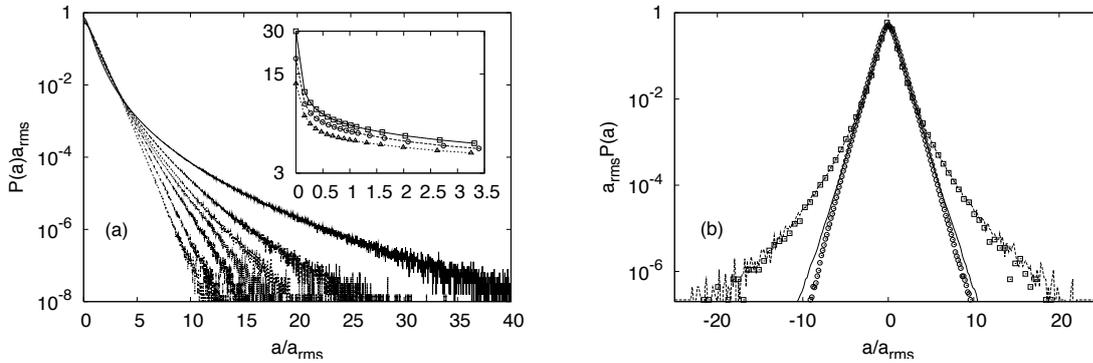


FIGURE 2.2 – (a) Densités de probabilité de l'accélération pour $St = 0, 0.16, 0.37, 0.58, 1.01, 2.03, 3.31$ (de haut en bas) et $R_\lambda = 185$. L'encart montre le coefficient d'aplatissement de l'accélération, $\langle |a|^4 \rangle / \langle |a|^2 \rangle^2$, pour R_λ croissant de bas en haut. (b) Les deux courbes les plus étalées correspondent à la distribution d'accélération pour $St = 0.16$ (\square) ainsi qu'à la densité de probabilité de l'accélération des traceurs mesurée le long des trajectoires de particules (ligne continue). Les deux courbes les plus internes sont la distribution d'accélération pour $St = 3.31$ (\circ) et celle du fluide filtrée. Toutes les courbes sont normalisées à une variance unité.

Au delà de l'effet de l'inertie sur les accélérations typiques, il est intéressant d'étudier son impact sur la forme même des distributions de probabilité de $a(t)$. Comme nous le voyons dans la Fig. 2.2(a), les densité de probabilité deviennent de moins en moins intermittente au fur et à mesure que St augmente. Dans l'encart de la même figure, nous représentons la *flatness*, $\langle |a|^4 \rangle / \langle |a|^2 \rangle^2$, en fonction de St . La décroissance abrupte pour $St > 0$ est encore bien plus visible ici (il est important de noter que l'axe des y est ici en échelle logarithmique).

Dans les limites des petites et grandes valeurs de St les aspects qualitatifs des distributions peuvent être capturés par les mêmes arguments que ceux développés pour a_{rms} . Dans la Fig. 2.2(b), nous comparons pour la plus petite valeur de St la forme de la distribution avec celle obtenue en utilisant l'accélération du traceur mesurée à la position des particules. On peut observer que les deux courbes se superposent parfaitement. Sur la même figure, nous avons aussi calculé pour $St = 3.31$ la distribution de l'accélération des trajectoires fluides filtrées. Cette fois-ci l'agrément est moins fort mais toutefois convaincant.

Les conclusions que nous pouvons tirer de cette étude statistique de l'accélération de particules inertielles lourdes dans des écoulements turbulents sont les suivantes : (i) la concentration préférentielle joue un rôle quasiment singulier aux petites valeurs du nombre de Stokes ; une inertie même infime est suffisante pour l'éjection des particules des régions les plus turbulentes (cœur des tourbillons où les fluctuations de l'accélération les plus violentes et intermittentes auraient été rencontrées) ; (ii) aux petits nombres de Stokes, un bon accord quantitatif est obtenu entre l'accélération des particules inertielles et celle du fluide à la position des particules ; (iii) aux grands nombres de Stokes, l'effet principal est

un filtrage de la vitesse du fluide induit par le temps de réponse des particules ; ceci est attesté par le fait que le bon accord entre les propriétés des particules est celles des traceurs une fois filtrées sur une fenêtre temporelle de l'ordre de τ .

Il reste toutefois quelques questions importantes. Tout d'abord, nous sommes encore loin de pouvoir développer un modèle phénoménologique qui permettrait de décrire l'accélération des particules inertielles en fonction des nombres de Stokes et de Reynolds. Par exemple, une généralisation naïve de la description multifractale utilisée avec succès pour les traceurs [BBC⁺04] semble insuffisante. Il est en effet loin d'être trivial d'inclure dans cette approche les corrélations entre la concentration préférentielle et les propriétés locales du champ de vitesse de l'écoulement turbulent. Aussi, les fortes fluctuations aussi bien du temps de Kolmogorov que de l'échelle dissipative sont certainement les aspects les plus intéressants qui distinguent les statistiques des particules lourdes en turbulence de celles dans des écoulement aléatoires lisses. Une idée, déjà partiellement explorée dans [CK04] pourrait être d'étudier les statistiques conditionnées sur un nombre de Stokes local (défini par exemple en termes d'un taux local de transfert d'énergie).

2.1.2 Fonctions de structure lagrangiennes et filaments de vortacité

La fonction de structure lagrangienne

$$S^{(p)}(s) = \langle [V_p(t+s) - V_p(t)]^p \rangle, \quad (2.5)$$

mesure les variations temporelles d'une composante V_p de la vitesse d'un traceur ou d'une particule. Pour des séparations temporelles s aux échelles inertielles (i.e. pour $\tau_\eta \ll s \ll \tau_L$, où τ_L est l'échelle de temps intégrale lagrangienne), on s'attend à ce que la fonction de structure lagrangienne des traceurs se comporte comme une loi de puissance $S^{(p)}(s) \propto s^{\zeta(p)}$ (voir par exemple [MMMP01]). Les arguments dimensionnels (à la Kolmogorov 1941) prédisent $S^{(p)}(s) \propto (\epsilon s)^{p/2}$. D'importantes déviations par rapport au scaling non-intermittent $\zeta(p) = p/2$ ont été observées à la fois dans les expériences et les simulations numériques directes (voir [ABB⁺08] et les articles qui y sont cités). Pour les particules lourdes, il n'y a pas de théorie de référence. Vu que l'effet de l'inertie sur les statistiques de la vitesse devient de moins en moins important lorsque s/τ augmente [BFF01, FP04], on peut s'attendre à ce que les particules retrouvent les propriétés statistiques des traceurs lorsque $\tau_\eta \sim \tau \ll s \ll \tau_L$.

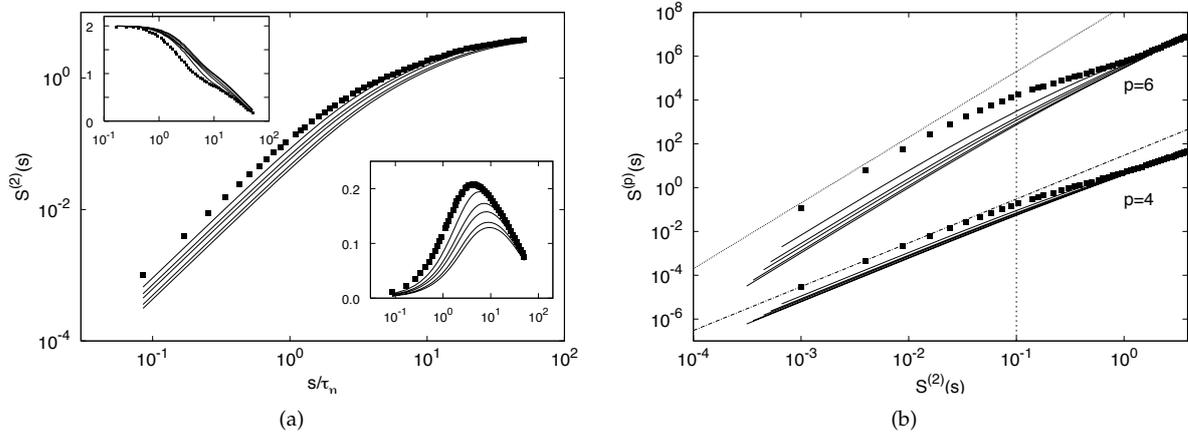


FIGURE 2.3 – (a) $S^{(2)}(s)$ en fonction de s/τ_η pour les traceurs (■) et des particules lourdes avec $St = 0.16, 0.37, 0.59, 1.01$ et 1.34 (lignes pleines du haut vers le bas). Encart inférieur : graphe compensée $S^{(2)}(s)/s$ en fonction de s/τ_η (mêmes symboles). Encart supérieur : dérivée logarithmique $d \log(S^{(2)}(s))/d \log s$ en fonction de s/τ_η (mêmes symboles). Pour chaque nombre de Stokes, les moyennes dans (2.5) sont effectuées sur $N = 5 \times 10^5$ trajectoires qui dure chacune environ $200\tau_\eta$. Toutes les courbes sont obtenues en moyennant sur les différents composantes de la vitesse pour augmenter les statistiques. (b) $S^{(p)}(s)$ en fonction de $S^{(2)}(s)$ pour $p = 4$ et $p = 6$ pour les traceurs (■) et des particules lourdes avec les mêmes nombre de Stokes que dans (a). Les deux lignes droites représentent le scaling dimensionnel non-intermittent $\zeta(p)/\zeta(2) = p/2$. À noter la similarité entre les différents St qui diffèrent fortement des traceurs pour des séparations temporelles de l'ordre de l'échelle visqueuse $S^{(2)}(\tau_\eta) \approx 0.1$ (ligne pointillée verticale).

Pour mieux comprendre cette question, nous nous basons ici sur des mesures numériques des fonctions de structures lagrangiennes (voir section précédente pour plus de détails sur les simulations). En comparant les propriétés statistiques des traceurs et des particules, nous avons trouvé de l'évidence

que les premiers sont fortement affectés par leur piégeage dans les filaments de vorticité pendant des temps clairement plus grands que l'échelle de Kolmogorov $1 \leq s/\tau_\eta \leq 10$, alors que cet effet devient de moins en moins important lorsque le nombre de Stokes St augmente. Les événements de piégeage contaminent les propriétés d'échelle pour des séparations temporelles à l'intérieur de la gamme inertielle de la turbulence. Cette observation explique en partie le désaccord indiqué dans [XBOB06] qui existe entre les propriétés de scaling des fonctions de structure lagrangiennes des traceurs mesurées expérimentalement [LPVC⁺01, MMMP01, CMB05] et numériquement [BBC⁺04, BBC⁺05b].

La figure 2.1 donne un résumé des résultats pour la fonction de structure lagrangienne du second ordre lorsque l'on fait varier l'inertie des particules. Il est assez difficile de mesurer un comportement en loi de puissance aux échelles inertielles, comme l'indique la dérivée logarithmique de $S^{(2)}$ montrée dans l'encart supérieur. Les plateaux que l'on pourrait penser voir dans le graphe compensé de l'encart inférieur peuvent eux aussi être difficilement considérés comme le signe d'une loi de puissance $\propto s$. Les effets de l'inertie sont très marqués dans cet encart : déjà pour le plus petit nombre de Stokes que nous avons considéré ($St = 0.16$), on observe un écart significatif avec le cas des traceurs.

Il est aussi intéressant de mesurer les effets de l'inertie sur les moments d'ordres plus élevés. Comme cela est souvent fait dans les études des écoulements turbulents, l'observation de déviations par rapport à des propriétés d'échelle purement dimensionnelles peut se faire en comparant tous les moments à ceux d'un ordre de référence. Cette procédure a été originellement proposée pour les fonctions de structure eulériennes et porte le nom de « Extended Self Similarity » [BCT⁺93]. Dans les cas des fonctions de structure lagrangiennes, cela revient à étudier le comportement de $S^{(p)}$ en fonction de $S^{(2)}$, le second ordre étant utilisé comme référence pour les études lagrangiennes. Il est bien connu que ce procédé a l'avantage de diminuer les effets de nombre de Reynolds fini, mais les mécanismes sous-jacents ne sont compris que dans des cas simples (comme par exemple pour la turbulence de Burgers [CFR10]). La figure 2.3(b) représente $S^{(p)}(s)$ en fonction de $S^{(2)}(s)$ pour $p = 4$ et $p = 6$ et différentes valeurs de St . Deux observations peuvent être faites. Tout d'abord, les fonctions de structure lagrangiennes aussi bien des traceurs que des particules montrent une loi d'échelle dans une *gamme inertielle* dont l'exposant diffère de façon significative de $\zeta(p)/\zeta(2) = p/2$. Ensuite, les différences entre les traceurs et les particules inertielles autour de $s \sim \tau_\eta$, c'est-à-dire pour $S^{(2)}(\tau_\eta) \sim 0.1$, sont maintenant bien plus prononcées.

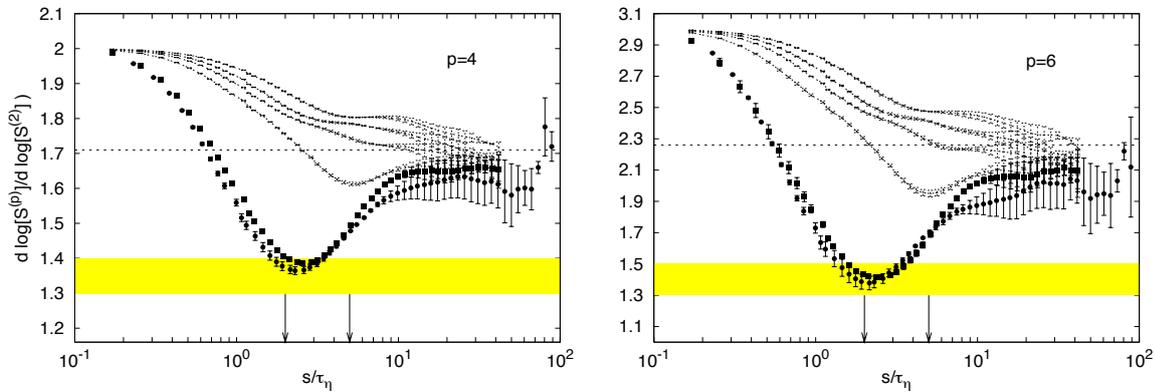


FIGURE 2.4 – Dérivée logarithmique des graphes ESS de la Fig. 2.3(b) en fonction de s/τ_η pour $p = 4$ (gauche) et $p = 6$ (droite). Les données pour les traceurs à $R_\lambda = 180$ et $R_\lambda = 300$ sont représentées respectivement par \blacksquare et \bullet . Les lignes pleines correspondent aux particules inertielles lourdes avec $St = 0.16, 0.37, 0.59, 1.01$ (de bas en haut). La ligne horizontale pointillée montre la prédiction multifractale de [BBC⁺04] ($\zeta(4)/\zeta(2) = 1.71$ et $\zeta(6)/\zeta(2) = 2.26$). La bande jaune correspond aux valeurs expérimentales mesurées pour les traceurs dans [XBOB06] à des nombres de Reynolds comparables et pour des incréments temporels s entre $2\tau_\eta$ et $5\tau_\eta$ (montrés par des flèches). Les barres d'erreurs ont été estimées à partir des variations entre les trois composantes.

Pour être plus quantitatif, nous avons représenté sur la Fig. 2.4 les pentes locales (dérivées logarithmiques) $d \log(S^{(p)}(\tau))/d \log(S^{(2)}(\tau))$ des différentes fonctions de structure pour $p = 4$ et 6 . Bien à l'intérieur de la gamme d'échelle inertielle (pour $10\tau_\eta < s < T_L$), toutes les données montrent une tendance à converger (aux barres d'erreur près) vers le même comportement d'échelle quelque soit la valeur du nombre de Stokes. Les erreurs importantes aux grandes échelles sont dues aux fluctuations anisotropes qui ne peuvent être évitées qu'en augmentant de façon significative la statistique. Sur la même figure, nous avons aussi représenté la prédiction multifractale pour les traceurs obtenue dans [BBC⁺04] (voir aussi [Bor93, BDLM02]) et appliquant le modèle multifractal eulérien bien connu aux statistiques lagrangiennes. On peut noter que le comportement aux échelles inertielles est compatible avec cette

prédiction, même pour les particules lourdes. Pour des séparations temporelles proches des échelles dissipatives, c'est-à-dire pour $\tau_\eta \leq s \leq 10\tau_\eta$, les propriétés d'échelle locales montrent la présence d'un effet goulot important qui est bien plus prononcé pour les traceurs que pour les particules inertielles. Autour de ces échelles temporelles et aussi bien pour $p = 4$ que $p = 6$, les traceurs ont des propriétés d'échelle très intermittentes qui sont très vite affaiblies dès que l'inertie des particules entre en jeu. Ceci est dû au fait que les traceurs ($St = 0$) ont la possibilité d'être capturés pendant des temps assez longs dans les filaments de vorticité tandis que les particules inertielles en sont éjectées même lorsque $St \ll 1$. Les valeurs des exposants d'échelle des fonctions de structure lagrangiennes données dans l'étude expérimentale de [XBOB06] pour des traceurs à des nombres de Reynolds comparables sont représentées sur la Fig. 2.4 par des bandes jaunes. Dans cette étude, les exposants sont mesurés dans l'intervalle temporel $2 \leq s/\tau_\eta \leq 5$ où le piégeage dans les filaments de vorticité donne une contribution dominante et conduit à une statistique plus intermittente que ce à quoi on s'attend. Pour ces séparations temporelles, les résultats de cette simulation numérique sont en bon accord avec ce qui est mesuré dans [XBOB06]. Toutefois, ils sont assez différents des valeurs que nous pouvons observer sur la Fig. 2.4 pour $s > 10\tau_\eta$.

Pour conclure cette sous-section, soulignons le fait que les simulations numériques directes indiquent que les propriétés dynamiques des particules inertielles convergent vers celles de traceurs lorsqu'elles sont évaluées sur des séparations temporelles suffisamment longues (pour $s \gg \tau_\eta$). Cette observation peut être expliquée par le fait que les particules doivent être de moins en moins influencées par leur inertie lorsque l'échelle augmente. Dans les cas des traceurs, il est important de considérer des séparations temporelles suffisamment longues pour éviter d'être contaminé par les phénomènes de piégeage dans les filaments de vorticité. Cet effet de piégeage est assez peu efficace pour les particules lourdes.

2.1.3 Sédimentation turbulente

Nous étudions dans cette section les relations complexes entre inertie, turbulence de l'écoulement porteur et forces de pesanteur s'exerçant sur les particules. Un des effets les plus marquants de la turbulence sur la sédimentation des particules est l'augmentation de leur vitesse terminale induite par leur concentration préférentielle dans les zones descendantes de l'écoulement [Max87, WM93, ARWG08]. La compréhension de ce phénomène est essentiellement qualitative et n'a été quantifiée que dans des écoulements modèles [DH01]. Nous rapportons ici les résultats obtenus dans [BHR14]. En combinant des simulations numériques directes massives et de l'analyse asymptotique, nous avons étudié les propriétés dynamiques et statistiques des particules sous influence de la gravité en fonction de (i) le niveau de turbulence de l'écoulement porteur (nombre de Reynolds R_λ), (ii) l'inertie des particules (nombre de Stokes St) et (iii) le rapport entre les accélérations turbulentes et la gravité (nombre de Froude Fr).

Nous avons effectué des simulations d'un écoulement turbulent en utilisant le solveur pseudo-spectral *LaTu* avec différentes résolutions spatiales : 256^3 ($R_\lambda \approx 130$), 1024^3 ($R_\lambda \approx 290$) et 2048^3 ($R_\lambda \approx 460$). Les particules sont supposées bien plus petites que η , très lourdes et associées à une faible valeur du nombre de Reynolds associé à leur vitesse de glissement. Leurs trajectoires $\mathbf{X}_p(t)$ satisfont alors

$$\frac{d\mathbf{X}_p}{dt} = \mathbf{V}_p, \quad \frac{d\mathbf{V}_p}{dt} = -\frac{1}{\tau} [\mathbf{V}_p - \mathbf{u}(\mathbf{X}_p, t)] + \mathbf{g}, \quad (2.6)$$

où \mathbf{g} désigne l'accélération de la gravité et τ le temps de relaxation visqueux des particules. Dans nos simulations, des trajectoires individuelles de particules sont intégrées pour différentes valeurs de τ et de $g = |g|$. La vitesse du fluide à la position des particules est obtenue par interpolation linéaire. Le nombre de Stokes est défini comme précédemment par $St = \tau/\tau_\eta$ où τ_η désigne le temps de retournement associé à l'échelle dissipative de Kolmogorov. L'effet de la gravité est mesuré par le nombre de Froude $Fr = \varepsilon^{3/4}/(g\nu^{1/4})$ défini comme le rapport entre l'accélération turbulente typique η/τ_η^2 et celle de la gravité. Dans chacune de nos simulations, nous avons utilisé 10 valeurs différentes du nombre de Stokes et 5 du nombre de Froude (y compris le cas sans gravité). Pour obtenir une convergence suffisamment forte des statistiques, nous avons utilisé un grand nombre de particules N_p : pour $R_\lambda \approx 460$, $N_p = 10^9$, pour $R_\lambda \approx 290$, $N_p = 1.28 \times 10^8$, et pour $R_\lambda \approx 130$, $N_p = 8 \times 10^6$.

La figure 2.5(a) montre un instantané représentatif du module de la vorticité $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$ dans une fine tranche de notre écoulement tridimensionnel et, au même instant, la position de particules ayant le même nombre de Stokes ($St = 1$) mais différents nombres de Froude Fr . On peut observer que lorsque la gravité est négligeable ($Fr = \infty$), la distribution de particule se corr  le avec les régions de faible vorticité. Lorsque l'on augmente les effets de la gravité, les agrégats de particules ne sont pas instantanément détruits mais cela leur donne plutôt de l'anisotropie puisque les particules sont de plus en plus alignées

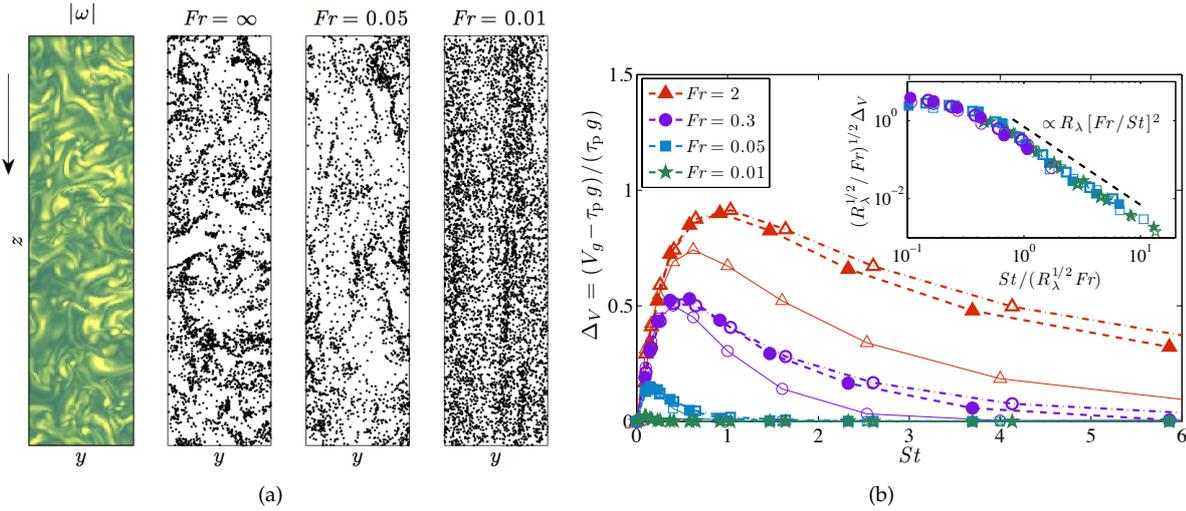


FIGURE 2.5 – (a) Instantané du module de la vorticité (à gauche ; jaune = valeurs faibles, vert = valeurs fortes) et de la position des particules pour $R_\lambda = 130$, $St = 1$ et trois valeurs différentes du nombre de Froude dans une tranche de l'écoulement d'épaisseur 10η , de largeur 130η et de hauteur 520η . La flèche verticale indique la direction de la gravité. (b) Augmentation relative de la vitesse de sédimentation Δ_V – définie par (2.7) – en fonction du nombre de Stokes St pour différents nombre de Froude (comme indiqué en légende) et $R_\lambda = 130$ (symboles fins, lignes pleines), $R_\lambda = 290$ (symboles remplis, lignes tirets) et $R_\lambda = 460$ (symboles vides, lignes pointillées). Encart : $[R_\lambda^{1/2} / Fr]^{1/2} \Delta_V$ en fonction de $St / [R_\lambda^{1/2} Fr]$ pour les mêmes données.

avec la direction verticale $\hat{e}_z = -g/g$. Ceci indique que la sédimentation est responsable d'une bidimensionnalisation de la dynamique des particules et, comme cela peut être observé pour la plus grande valeur de Fr sur la Fig. 2.5(a), l'accumulation des particules est toujours présente mais les gradients de concentration sont essentiellement alignés avec les directions horizontales.

Pour mieux comprendre les mécanismes sous-jacents, essayons d'estimer la vitesse moyenne de sédimentation $V_g = -\langle \mathbf{V}_p \cdot \hat{e}_z \rangle$. Il est clair d'après (2.6), que la stationnarité statistique de la vitesse des particules implique que $V_g = \tau g - \langle u_z(\mathbf{X}_p, t) \rangle$. Le premier terme est égal à la vitesse terminale d'une particule avec un temps de réponse τ dans un écoulement au repos. Il a été observé dans [Max87, WM93] que des particules en sédimentation dans un écoulement turbulent sont plus amènes à échantillonner les régions où la vitesse verticale de l'écoulement est dans le sens de la gravité ; ceci conduit à une augmentation de leur vitesse moyenne de sédimentation.

Nous observons aussi cet effet dans nos simulations, comme cela est montré sur la Fig. 2.5(b) qui représente l'augmentation relative de la vitesse de sédimentation

$$\Delta_V = \frac{V_g - \tau g}{\tau g} = - \frac{\langle u_z(\mathbf{X}_p, t) \rangle}{\tau g} \quad (2.7)$$

(comparée à la vitesse terminale dans un fluide au repos) en fonction du nombre de Stokes des particules et pour différentes valeurs de Fr et R_λ . On remarque que cet effet est le plus significatif pour les plus grandes valeurs du nombre de Froude (lorsque les accélérations sont dominantes par rapport à la gravité) et pour les particules dont l'inertie est suffisamment grande. Au contraire, pour les particules avec une faible inertie ($St \ll 1$), le gain Δ_V est quasiment indépendant de Fr et R_λ .

Pour comprendre cela de manière quantitative, considérons d'abord l'asymptotique $St \ll 1$. Comme nous l'avons déjà vu précédemment, à l'ordre dominant, tout se passe comme si les particules étaient advectées par un écoulement compressible effectif [Max87], c'est-à-dire $\mathbf{V}_p \approx \mathbf{v}(\mathbf{X}_p, t)$ avec

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} + \tau \mathbf{g} - \tau [\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} + \tau \mathbf{g}) \cdot \nabla \mathbf{u}]. \quad (2.8)$$

Concentrons nous sur le mouvement dans les directions (x, y) transverses à la gravité. On peut alors utiliser (2.8) pour écrire la corrélation $\langle u_z \nabla_\perp \cdot \mathbf{v}_\perp \rangle$, où $\mathbf{v}_\perp = (v_x, v_y)$. Il est facile de vérifier que tous les termes, excepté l'advection due à la sédimentation, s'annulent soit par incompressibilité ou isotropie de la vitesse de l'écoulement fluide. On obtient ainsi

$$\langle u_z \nabla_\perp \cdot \mathbf{v}_\perp \rangle = \tau^2 g \langle (\partial_z u_z)^2 \rangle > 0. \quad (2.9)$$

Cela signifie qu'en moyenne, l'accumulation horizontale des particules (divergence négative) se fait dans les régions où l'écoulement est descendant ($u_z < 0$). Ceci quantifie les idées de « preferential

sweeping » introduites dans [WM93]. Avec des arguments similaires à ceux utilisés dans [FFS02] (voir aussi [Fou12]) pour les corrélations de densité, on peut relier la vitesse verticale du fluide le long des trajectoires de particules à la corrélation (2.9). Dans la limite $St \ll 1$, la divergence $\nabla_{\perp} \cdot \mathbf{v}_{\perp}$ donne en effet le biais statistique dû à la concentration préférentielle (ou plus exactement à l'échantillonnage préférentiel) des particules. Ceci implique que $\langle u_z(\mathbf{X}_p, t) \rangle \propto \tau_{\eta} \langle u_z \nabla_{\perp} \cdot \mathbf{v}_{\perp} \rangle$ et, en utilisant (2.9), cela conduit à $\Delta_V \propto \tau_{\eta} \tau \langle (\partial_z u_z)^2 \rangle \propto St$. Ce résultat confirme ainsi le comportement linéaire, indépendant de Fr et R_{λ} qui est observé sur la Fig. 2.5(b) aux petits nombres de Stokes.

Dans l'autre asymptotique ($St \gg 1$), la vitesse de sédimentation V_g devient très grande et le fluide vu par les particules devient quasiment décorréolé en temps. Les particules ont un mouvement quasi balistique dans la direction verticale et diffusent dans le plan horizontal. Cela se produit lorsque le temps L/V_g nécessaire pour qu'une particule traverse l'échelle intégrale $L = u_{\text{rms}}^3/\varepsilon$ est bien plus petit que le temps de corrélation à grande échelle $\tau_L = L/u_{\text{rms}}$. En effectuant le changement d'échelle de temps $t \mapsto s = t u_{\text{rms}}/(\tau_L V_g)$ et d'espace $(x, y) \mapsto \mathbf{X}_p^{\perp} = (x/L, y/L)$, la dynamique des particules dans les directions horizontal (en unités adimensionnées) peut être approchée par

$$\frac{d\mathbf{V}_p^{\perp}}{ds} \simeq -\frac{1}{\bar{S}} [\mathbf{V}_p^{\perp} - \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{X}_p^{\perp}, s)] \quad (2.10)$$

où $\bar{S} = (\tau/\tau_L)(u_{\text{rms}}/V_g)$ et $\tilde{\mathbf{u}}$ est un champ de vitesse bidimensionnel, bruit blanc en temps, dont les corrélations ont la même structure spatiale que \mathbf{u} . Cette approche est similaire à celle développée dans [FH08] pour les particules avec une grande inertie. Ainsi, les propriétés statistiques à une particule données par le système adimensionné ci-dessus ne dépendent que du nombre de Stokes effectif \bar{S} . En particulier, cela implique que la vitesse de sédimentation prend la forme $V_g \simeq \tau g + u_{\text{rms}}^2 \Psi(\bar{S})/V_g$ où Ψ est une fonction sans dimension qui prend en compte l'échantillonnage préférentielle de l'écoulement par les particules. À l'ordre dominant, $V_g \simeq \tau g$, de telle sorte que $\Delta_V \sim \Psi(\bar{S}) R_{\lambda} (Fr/St)^2$ et $\bar{S} \sim Fr/\sqrt{R_{\lambda}} \ll 1$, qui est indépendant du nombre de Stokes des particules. Comme le champ de vitesse apparaissant dans (2.10) est blanc en temps, on s'attend à ce que pour $\bar{S} \ll 1$, les observables statistiques puissent s'écrire comme une somme de puissances demi-entières de \bar{S} (voir par exemple [BCHT08]). On a ainsi $\Psi(\bar{S}) \sim \bar{S}^{1/2}$, ce qui conduit à

$$\Delta_V \propto R_{\lambda}^{3/4} Fr^{5/3} St^{-2} \text{ pour } St \gg R_{\lambda}^{1/2} Fr \text{ et } Fr \ll R_{\lambda}^{1/2} \quad (2.11)$$

Ce comportement est confirmé par nos données, comme cela peut être vu dans l'encart de la Fig. 2.5(b). Il est important de remarquer que dans cette asymptotique, la dépendance $\Delta_V \propto R_{\lambda}^{3/4}$ est essentiellement due aux définitions de St et Fr en termes de quantités associées aux échelles dissipatives tandis que les mécanismes décrits ci-dessus impliquent les échelles intégrales.

Comme cela est détaillé dans [BHR14], la bidimensionnalisation de la dynamique a aussi des conséquences dans l'effet de la sédimentation sur les propriétés de concentration des particules à petite échelle et leurs taux de collision. Plus précisément, les deux mécanismes qui déterminent le taux auquel les particules entrent en collision, à savoir leur concentration préférentielle et les différences de vitesse importantes, sont affectés de façons concurrentielles par la gravité. Les concentrations sont augmentées et les différences de vitesse affaiblies. Toutefois le premier effet domine le second lorsque $St \lesssim Fr$, ce qui a pour conséquence que la présence de la gravité peut dans certains cas augmenter le taux auquel des particules de même taille entrent en collision. Ces corrections pourraient être importantes lorsque l'on veut déterminer les échelles de temps auxquelles les gouttelettes d'eau d'un nuage croissent par coalescence. Ce nouvel effet, qui combine la turbulence de l'écoulement porteur et la sédimentation gravitationnelle, se doit d'être gardé à l'esprit lorsque l'on cherche à améliorer les modèles existants.

2.2 Particules matérielles et effets de taille

Cette section porte sur l'étude des effets d'une taille finie sur la dynamique des particules. Dans le cas de très petites particules, il est possible d'écrire explicitement les forces hydrodynamiques exercées par le fluide. Ceci ne s'applique pas au cas de particules dont les tailles sont dans la gamme d'échelles inertielles de l'écoulement et un effort important de modélisation est alors nécessaire. La majeure partie des travaux numériques effectués sur ce problème s'est généralement limitée à comprendre l'effet des particules sur un fluide au repos ou à des situations où l'écoulement porteur a un nombre de Reynolds relativement faible. Peu d'études se sont consacrées à la dynamique de telles particules dans un écoulement maintenu dans un régime de turbulence développée stationnaire. J'ai développé, en collaboration avec H. Homann, un code hydrodynamique capable d'intégrer l'équation de Navier–Stokes dans

un domaine comportant des particules matérielles. L'idée est d'utiliser un code pseudo spectral où les conditions de bords à la surface des particules sont imposées par une méthode dite « de pénalisation ». La dynamique des particules est ensuite implémentée en calculant de façon explicite les forces exercées par le fluide sur la surface des particules, ainsi que leur moment.

2.2.1 Effet des fluctuations turbulentes sur la traînée et la poussée

Dans cette sous-section nous appliquons la méthode de pénalisation pour mesurer la traînée, la poussée et la rotation d'une particule sphérique fixe dans une soufflerie numérique. Ces résultats nous ont permis de montrer que notre technique est précise et efficace [HBG13] (voir aussi cette référence pour plus de détails sur la méthode numérique). L'implémentation est complètement parallèle et le code tourne sur des dizaines de milliers de processeurs, ce qui permet une très haute résolution spatiale.

Écoulement amont laminaire

Nous commençons par considérer ici une particule isolée, fixée dans un écoulement qui est laminaire en amont. La vitesse moyenne de l'écoulement $U_c = U_c e_x$ est donnée et le nombre de Reynolds de la particule est choisi en variant soit son diamètre D_p , soit la viscosité du fluide. L'allure typique de l'écoulement est montrée sur la Fig. 2.6 pour une valeur du nombre de Reynolds au delà du seuil où un sillage non-stationnaire se développe. Une configuration de ce type a deux buts : d'une part, elle nous permettra de tester la méthode numérique et, d'autre part, elle sera utilisée pour étudier le déclin de la turbulence dans le sillage de la sphère.

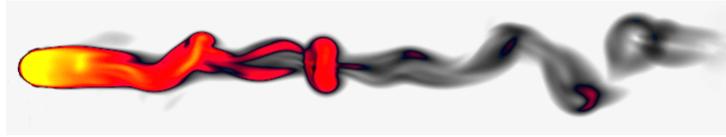


FIGURE 2.6 – Sillage turbulent pour $Re_p = 400$ (vorticité volumique apparente).

Nous nous concentrons tout d'abord sur la mesure des forces que le fluide exerce sur la particule. Le coefficient de traînée est défini comme

$$C_D = \frac{8 F_D}{\pi D_p^2 \rho_f U_c^2}, \quad (2.12)$$

où F_D désigne la force totale exercée dans la direction du courant et ρ_f la densité de masse du fluide. La figure 2.7 montre des mesures de ce coefficient et les compare à la formule empirique de Schiller et Naumann [SN33]

$$C_D^{SN} = \frac{24}{Re_p} (1 + 0.15 Re_p^{0.687}) \quad \text{avec} \quad Re_p = \frac{D_p U_c}{\nu} \quad (2.13)$$

Les coefficients de traînée mesurés et le profil de vitesse autour de la particule varient très peu par rapport à ce qui a déjà été observé dans ce type de configuration. L'encart de la Fig. 2.7(a) montre le rapport entre la contribution visqueuse C_F et celle de pression C_P au coefficient complet $C_D = C_F + C_P$. Ces rapports sont en accord raisonnable avec les résultats de [LHP70] où un schéma de type différences finies est utilisé. La convergence du coefficient de traînée peut être quantifiée lorsque l'on mesure l'erreur relative $(C_D - C_D^{SN})/C_D^{SN}$ en fonction du nombre de points de grille $\#_p$ le long du diamètre de la sphère. On observe sur la Fig. 2.7(b) que les coefficients convergent comme une loi de puissance avec l'exposant $-3/2$ pour les deux nombres de Reynolds considérés ici. Comme cela est montré dans [HBG13], cet ordre de convergence peut être relié à la représentation tronquée par la transformée de Fourier d'un champ de vitesse continu mais dont la dérivée a des discontinuités.

On considère maintenant que l'écoulement amont n'est plus homogène mais possède un gradient constant $U_y = U_c + g(y - y_0)$ caractérisé par le taux de cisaillement sans dimension $s = g D_p / U_c$. Ce profil linéaire crée une force de poussée $F_L = \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_y$ sur la particule à laquelle on peut associer le coefficient de poussée

$$C_L = \frac{8 F_L}{\pi D_p^2 \rho_f U_c^2}. \quad (2.14)$$

Ce coefficient a déjà été mesuré en utilisant d'autres méthodes numériques : des volumes finis [DD90], des différences finies [KK99] et une méthode Chebyshev-Fourier [BB02]. Dans tous ces cas un maillage

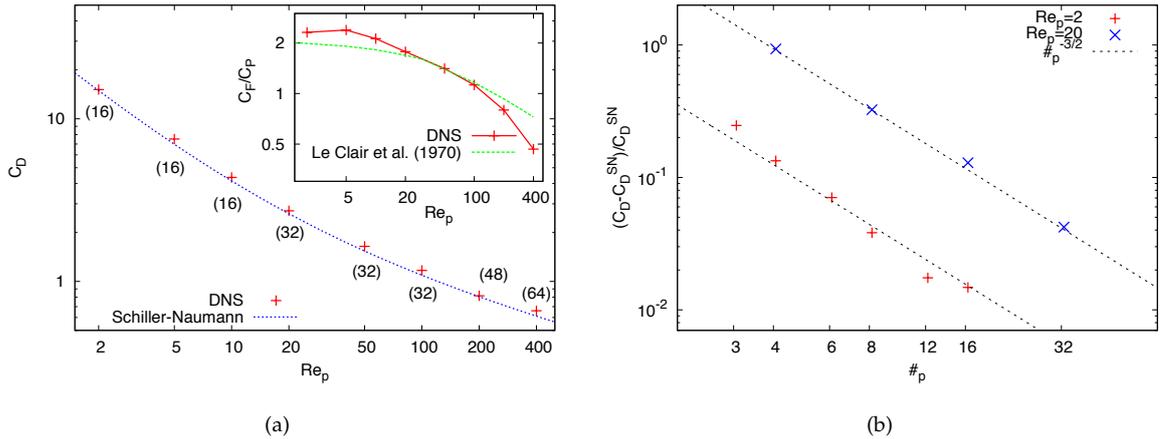


FIGURE 2.7 – (a) Coefficient de traînée C_D en fonction du nombre de Reynolds de la particule ; le nombre de points de grille le long d’un diamètre de la particule est donné entre parenthèse. Encart : rapport entre la contribution visqueuse C_F au coefficient de traînée et la contribution C_P venant de la pression. (b) Taux de convergence en fonction du nombre de points de grille $\#_p$ le long d’un diamètre de la particule sphérique.

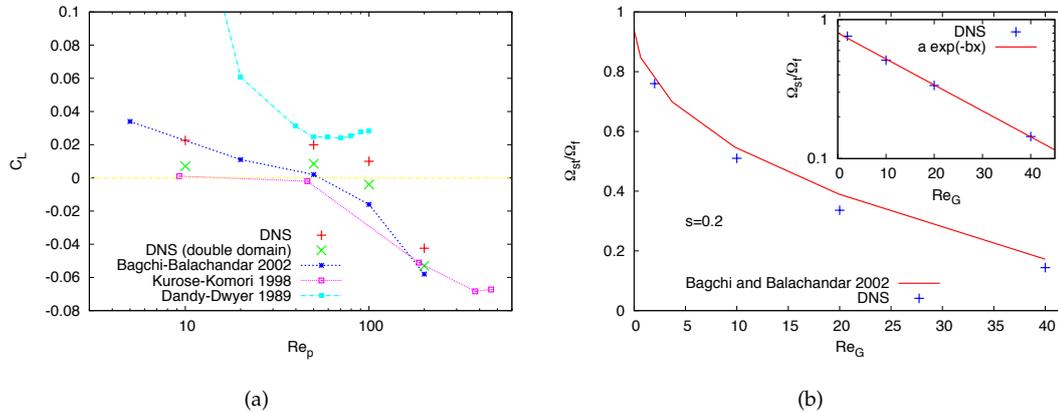


FIGURE 2.8 – (a) Coefficients de poussée C_L en fonction du nombre de Reynolds de la particule pour $s = 0.2$. (b) Taux de rotation stationnaire (normalisé par le taux de rotation ambiant $\Omega_f = g/2$) en fonction du nombre de Reynolds de la particule défini par le gradient moyen $Re_G = gd^2/\nu$. Encart : représentation logarithmique ; pour la loi exponentielle, nous avons utilisé $a = 0.8$ et $b = 0.043$.

cylindrique a été utilisé pour atteindre une plus grande résolution au voisinage de la particule. On observe sur la Fig 2.8(a) une assez grande dispersion dans les coefficients de poussée mesurés par les différents groupes. Ceci est lié au fait que la force de poussée est particulièrement sensible aux contraintes dans l’écoulement, et donc à la taille du domaine de la simulation. Il est par exemple affirmé dans [BB02] que la taille de la boîte utilisée dans [DD90] était trop petite, conduisant à une surestimation de la poussée. Nous avons calculé cette dernière pour deux tailles de boîtes différentes ($128 \times 128 \times 256$ et $256 \times 256 \times 512$). On observe effectivement que la poussée diminue lorsque la taille de la boîte augmente. Nos résultats sont en bon accord avec les deux travaux les plus récents et reproduisent notamment la transition vers les valeurs négatives observée pour $Re_p \approx 60 - 80$.

Finalement, nous avons aussi considéré le cas d’une sphère qui peut entrer librement en rotation dans cet écoulement cisailé. Après un régime transitoire, le taux de rotation (de couple nul) de la sphère atteint une valeur stationnaire représentée sur la Fig. 2.8 (b) en fonction du taux de cisaillement. Les valeurs mesurées sont en accord avec celles de [BB02]. En particulier, le déclin est moins rapide qu’une loi de puissance, comme cela a été proposé dans [LPS70]. Comme on peut le voir dans l’encart, on observe en fait une décroissance exponentielle du taux de rotation en fonction du nombre de Reynolds. Toutefois, ceci pourrait être de nouveau dû à un effet de boîte finie.

Nous nous intéressons maintenant à l’écoulement fluide et notamment aux statistiques de la vitesse dans le sillage de la particule. La majeure partie des modèles pour les écoulements turbulents en aval d’un obstacle repose sur l’étude de la moyenne de Reynolds des équations de Navier–Stokes écrite pour

le profil moyen stationnaire $U(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \rangle$. Ces équations impliquent le tenseur des contraintes de Reynolds $\tau_{ij}(\mathbf{x}) = \langle u'_i(\mathbf{x}, t) u'_j(\mathbf{x}, t) \rangle$, où $\mathbf{u}' = \mathbf{u} - U$ désigne la fluctuation turbulente de la vitesse. Cette équation est généralement fermée en utilisant une hypothèse de viscosité turbulente (voir, par exemple, [Pop00]). Lorsque la viscosité turbulente ν_T est supposée constante en espace, la vitesse moyenne dans la direction du courant $U(x, y, z) = \langle u_x(\mathbf{x}, t) \rangle$ prend la forme auto-similaire [Sch79]

$$U(x, y, z) = U_c \left[1 - \frac{C_D D_p^2}{32 \nu_T x} e^{-\frac{y^2+z^2}{r_{1/2}^2(x)}} \right], \text{ with } r_{1/2}(x) = D_p \sqrt{\frac{2 U_c x}{\nu_T \ln 2}}. \quad (2.15)$$

$r_{1/2}$ est appelé la demi-largeur du sillage. Notons que nous avons ici supposé que la particule est située en $x_0 = 0$. Une telle formule, qui est souvent utilisée dans les applications industrielles, a pour conséquence que le déficit de vitesse $\Delta U = 1 - U(x, 0, 0)/U_c$ se comporte comme x^{-1} loin de la particule. Cette loi a été observée expérimentalement [WF94] et dans les simulations numériques [BB04].

Notre analyse du sillage turbulent à une valeur modérée du nombre de Reynolds $Re_p = 400$ montre que la théorie de similarité basée sur une viscosité turbulente prédit correctement le déclin du déficit de vitesse. Ceci est clair sur la Fig. 2.9(a) où l'on observe que ΔU décroît comme une loi de puissance avec l'exposant -1 sur près d'une demi-décade. Les oscillations autour de la valeur -1 pour la pente locale représentée en encart sont une signature du phénomène de Gibbs provenant du forçage appliqué en $x \approx 12D_p$ pour rééquilibrer la vitesse à $\mathbf{u} = U_c \mathbf{e}_x$ avant que le fluide entre de nouveau dans le domaine périodique en amont de la particule.

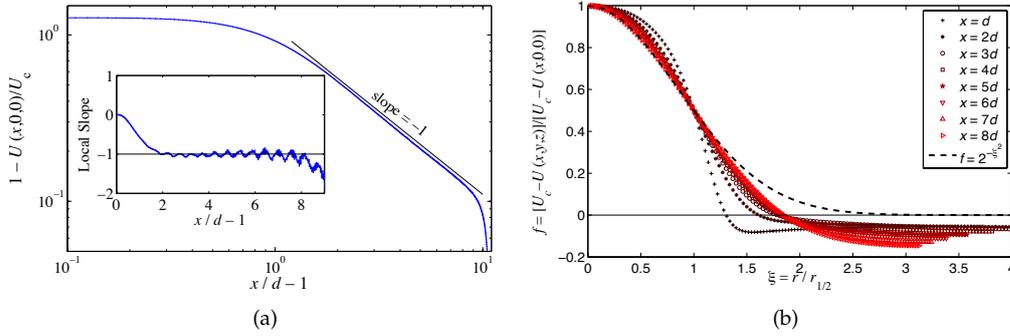


FIGURE 2.9 – (a) Déficit moyen de la vitesse $\Delta U = 1 - U(x, 0, 0)/U_c$ sur l'axe de symétrie $y = z = 0$ en fonction de la distance aval normalisée x/D_p . L'encart représente sa dérivée logarithmique (pente locale) $[d \ln \Delta U]/[d \ln(x/D_p - 1)]$. (b) Profil f du déficit moyen de la vitesse en fonction de la distance réduite $\xi = r/r_{1/2}$ à l'axe de symétrie pour différentes valeurs de x/D_p ; la courbe en tirets gras représente le profil similaire gaussien (2.15) donné par l'hypothèse d'une viscosité turbulente constante.

Toutefois, comme on le voit dans la Fig. 2.9(b), le profil du déficit moyen ne semble pas montrer de similarité. La demi-largeur du sillage $r_{1/2}$ a ici été calculée comme la distance à l'axe de symétrie pour laquelle le déficit de vitesse est égal à $1/2$. On observe des déviations au profil gaussien pour des valeurs de la variable réduite $\xi = r/r_{1/2} = \sqrt{y^2 + z^2}/r_{1/2}$ proches de $1/2$, de $3/2$ et pour $\xi > 2$. Les écarts observés aux grandes valeurs de ξ pourraient être dus à la périodicité du domaine dans les directions y et z . Toutefois, les déviations aux valeurs modérées sont similaires à celles observées expérimentalement dans [UF70] et [WF94].

Pour mieux comprendre le comportement $\propto x^{-1}$ observé pour le déficit de vitesse, il est intéressant de le relier au déclin de l'énergie cinétique turbulente dans le sillage de la particule. Pour cela nous utilisons une approche qui se base sur le principe de permanence des grands tourbillons connu depuis le travail fondamental de Kolmogorov [Kol41] pour le déclin temporel de la turbulence homogène. Le lecteur est renvoyé à la présentation phénoménologique faite dans [Fri95]. Le principe de permanence des grands tourbillons stipule que si les corrélations initiales de la vitesse turbulente prennent la forme $\langle u(x+r)u(x) \rangle \sim r^{-h}$ aux grandes séparations r , alors les lois de déclin de toutes les quantités turbulentes sont données par la valeur de l'exposant h . En particulier, l'échelle intégrale se comporte comme $L \sim t^{1/(1+h)}$ et l'énergie cinétique turbulente comme $k \sim t^{-2h/(1+h)}$. Le principe de base utilisé dans cet argument est la continuité des corrélations pour $r = L$.

Lorsque l'on considère le déclin dans le sillage d'un obstacle, toutes les quantités turbulentes doivent bien sûr être évaluées dans des plans perpendiculaires à l'axe de symétrie et le temps doit être remplacé par x/U_c en invoquant l'hypothèse de Taylor. Aussi, au lieu d'utiliser la continuité des corrélations à des échelles égales à la longueur de corrélation, l'ingrédient de base est maintenant de supposer que les

corrélations spatiales de la vitesse turbulente doivent se raccorder au déclin du déficit de vitesse aux grandes distances transverses r . Le principe de permanence des grands tourbillons implique alors que si le déficit de vitesse $\Delta U(r)$ à une distance r de l'axe de symétrie se comporte comme r^{-h} dans le sillage en développement, alors pour tout $x > 0$ loin en aval, les corrélations à grande échelle doivent garder mémoire de cette forme initiale et on s'attend donc à ce que l'énergie cinétique turbulente décroisse comme $k \sim x^{-2h/(1+h)}$.

Nous donnons maintenant un argument qui montre que le déficit de vitesse décroît de façon exponentielle aux grandes distances transverses r . Pour cela, on suppose qu'à l'ordre dominant le profile moyen axisymétrique peut s'écrire pour $r \gg d$ sous la forme séparée suivante

$$U_{\parallel} \simeq U_c + \Phi_{\parallel}(r) \Psi_{\parallel}(x) \quad \text{et} \quad U_{\perp} \simeq \Phi_{\perp}(r) \Psi_{\perp}(x), \quad (2.16)$$

dans les directions parallèles et transverses à l'écoulement moyen. On choisit ici $\Phi_{\parallel} > 0$ et $\Phi_{\perp} > 0$, de telle sorte que $\Psi_{\parallel} < 0$ et $\Psi_{\perp} < 0$. L'incompressibilité implique que $\Phi_{\parallel} \Psi'_{\parallel} + (1/r) (r \Phi_{\perp})' \Psi_{\perp} = 0$, et donc

$$(r \Phi_{\perp})' = C_1 r \Phi_{\parallel} \quad \text{et} \quad \Psi'_{\parallel} = -C_1 \Psi_{\perp}, \quad (2.17)$$

où C_1 est une constante qui par analyse dimensionnelle doit être $\propto 1/D_p$. À l'ordre dominant, l'équation de Navier–Stokes stationnaire donne

$$U_c \Phi_{\parallel} \Psi'_{\parallel} \simeq -\partial_x p \quad \text{et} \quad U_c \Phi_{\perp} \Psi'_{\perp} \simeq -\partial_r p. \quad (2.18)$$

L'ordre dominant du terme non-linéaire est donné par l'advection de la perturbation de vitesse par l'écoulement moyen U_c . Les contraintes de Reynolds contiennent le carré des fluctuations turbulentes et sont donc sous-dominantes pour $r \gg d$. Comme le terme visqueux devient négligeable aux grandes distances, l'advection est exactement équilibrée par le gradient de pression. En égalisant les dérivées croisées $\partial_x \partial_r p$ de la pression obtenues dans ces deux équation, on peut écrire $\Phi'_{\parallel} \Psi'_{\parallel} = \Phi_{\perp} \Psi''_{\perp}$, ce qui conduit à

$$\Phi'_{\parallel} = C_2 \Phi_{\perp} \quad \text{et} \quad \Psi''_{\perp} = C_2 \Psi'_{\parallel}, \quad (2.19)$$

où, de nouveau, C_2 est une constante $\propto 1/D_p$. En regroupant les conditions (2.17) et (2.19), on obtient que Φ_{\perp} est une solution de l'équation différentielle

$$(r \Phi'_{\perp})' = C_1 C_2 r \Phi_{\perp}, \quad \text{de telle sorte que } \Phi_{\perp} \propto \frac{1}{\sqrt{r}} e^{-C r/d}, \quad \text{pour } r \gg d \quad (2.20)$$

avec $C = D_p \sqrt{C_1 C_2}$ une constante positive sans dimensions indépendante de D_p . Ce déclin exponentiel du déficit moyen de vitesse implique le même comportement pour les corrélations de vitesse, comme cela est confirmé numériquement par la Fig. 2.10(a). On y voit que pour différentes valeurs de x , les corrélations de la composante radiale des fluctuations de vitesse se superposent pour les valeurs de r suffisamment grandes et tendent vers un comportement $\propto \exp(-r/r_0)$.

Pour en revenir à la loi de déclin, un comportement exponentiel des corrélations correspond à $h = \infty$. Ceci implique que l'énergie cinétique turbulente décroît comme $k \sim x^{-2}$, comme cela est confirmé numériquement sur la Fig. 2.10(c). Une telle loi de déclin de la turbulence peut ensuite être reliée à la décroissance du déficit de vitesse. La moyenne de Reynolds des équations de Navier–Stokes peut être utilisée pour montrer que $\Delta U(x) = 1 - U(x, 0, 0)/U_c$ se comporte de façon approchée comme

$$U_c^2 \partial_x \Delta U \sim \partial_x \tau_{xx} + \partial_y \tau_{xy} + \partial_z \tau_{xz} \sim k/L \propto x^{-2}, \quad \text{de telle sorte que } \Delta U \sim x^{-1}. \quad (2.21)$$

τ désigne ici le tenseur des contraintes de Reynolds. Ceci implique finalement que les propriétés d'échelle sont en accord avec le déclin de l'énergie cinétique turbulente. Aussi, $h = \infty$ implique que l'échelle intégrale reste constante ($L \sim x^0$). Le taux de dissipation décroît alors comme $\varepsilon \sim k^{3/2}/L \sim x^{-3}$ et les gradients typiques de la vitesse comme $\partial_x u \sim (\varepsilon/\nu)^{1/2} \sim x^{-3/2}$.

Comme nous l'avons ainsi vu, la méthode numérique de pénalisation spectrale est bien adaptée pour l'étude du sillage turbulent en aval de la particule. Ceci est par exemple montré par la précision avec laquelle les lois du déclin sont mesurées. Une des raisons vient du fait que les méthodes spectrales sont performante pour la simulation de la turbulence développée. Pour utiliser cet avantage, nous passons maintenant à l'étude de l'influence des fluctuations turbulentes qui sont éventuellement présentes en amont de la particule.

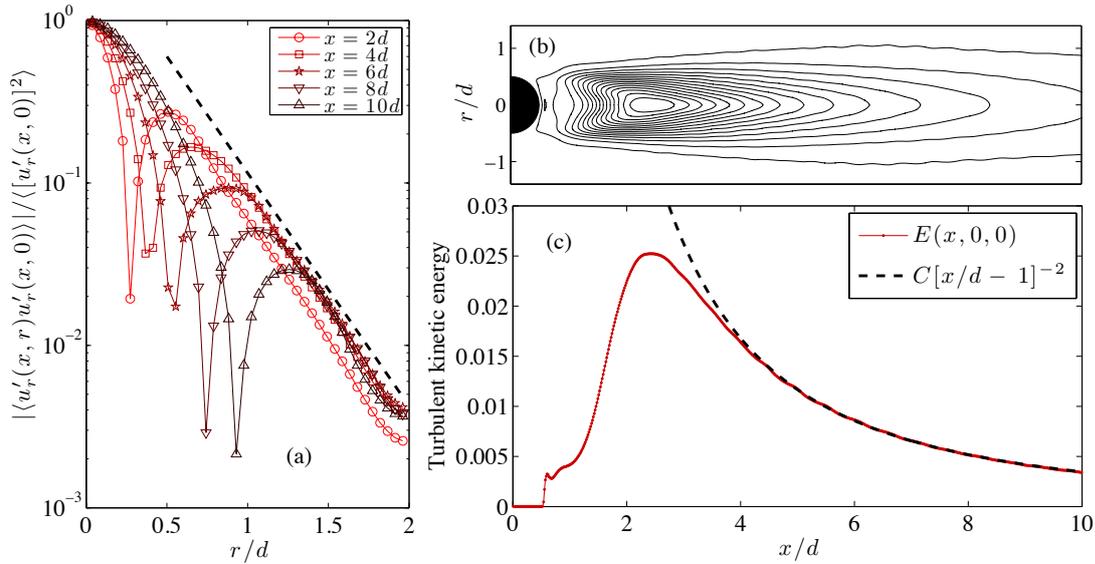


FIGURE 2.10 – (a) Corrélations des fluctuations radiales de la vitesse en fonction de la distance r à l’axe de symétrie pour différentes valeurs de la distance x en aval ; la ligne en tirets correspond à une décroissance exponentielle. (b) Lignes de contour de l’énergie cinétique turbulente k dans le plan (x, r) . (c) Profil de k le long de l’axe de symétrie $r = 0$ montrant clairement un comportement $\propto x^{-2}$

Écoulement amont turbulent

Nous considérons maintenant que l’écoulement autour de la particule est forcé de manière à le maintenir dans un régime turbulent stationnaire. La sphère est fixe (sans rotation) et l’écoulement moyen $U_c = U_c e_x$ ainsi que la viscosité sont maintenus constants dans toutes nos simulations. Pour chacune d’entre elles, nous varions le nombre de Reynolds de la particule en changeant sa taille. En plus de Re_p , il y a deux autres paramètres sans dimension qui caractérisent le système : le nombre de Reynolds de l’écoulement Re défini avec l’écart type u_{rms} des fluctuations de vitesse (et qui varie lorsque l’on change l’amplitude du forçage) et l’intensité turbulente à grande échelle $I = u_{rms}/U_c$ qui mesure la force des fluctuations turbulentes par rapport à l’écoulement moyen. Nous avons considéré quatre valeurs différentes du nombre de Reynolds de la particule $Re_p = 20, 100, 200$ et 400 et pour chacune d’entre elles plusieurs valeurs de l’intensité turbulente allant de 0.05 à 0.60 . Bien que l’espace des paramètres soit tridimensionnel, on ne fait varier que deux paramètres puisque l’on a décidé de maintenir constants U_c et ν et de ne varier que le diamètre D_p de la particule et l’intensité du forçage. Ce dernier paramètre détermine u_{rms} qui entre dans les définitions à la fois de Re et de I . Une première idée qualitative des

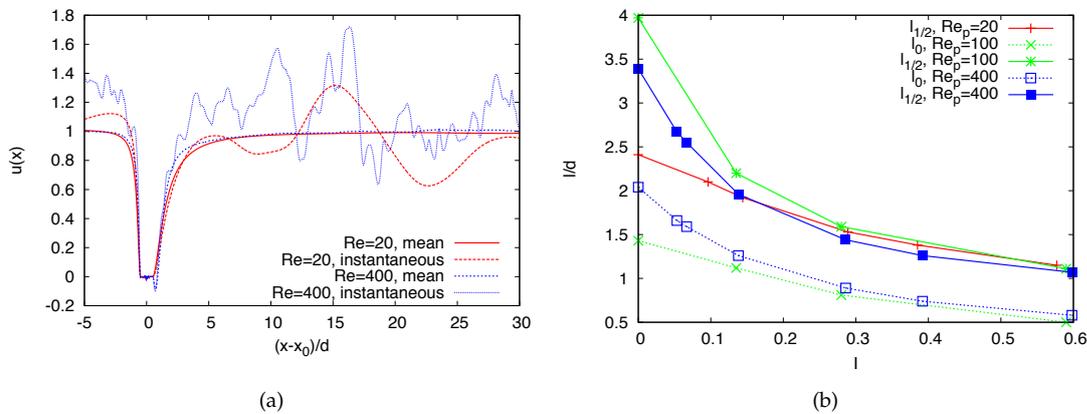


FIGURE 2.11 – (a) Profils instantanés et moyens de la vitesse dans la direction de l’écoulement le long de l’axe de symétrie ; le centre de la sphère est ici situé en x_0 . (b) Demi-longueur du sillage $l_{1/2}$ et étendue de la zone de recirculation l_0 en unités du diamètre et en fonction de l’intensité turbulente I pour différentes configurations.

structures de l’écoulement autour de la particule est donnée par la Fig. 2.11(a) qui montre les profils de

vitesse instantanés et moyen pour deux nombres de Reynolds de la particule ($Re_p = 20$ et $Re_p = 400$) dans le cas d'une intensité turbulente $I \approx 0.25$. On remarque que pour une intensité fixée, plus grand est le nombre de Reynolds de la particule, plus petites sont les échelles typiques des fluctuations de vitesse. Aussi, lorsque l'on fixe $Re_p = 400$ et que l'on varie I , on voit sur la Fig. 2.11(b) que les fluctuations turbulentes plus fortes réduisent l'étendue du sillage moyen et de la zone de recirculation en aval de la particule. Ceci confirme les observations faites dans [BB04].

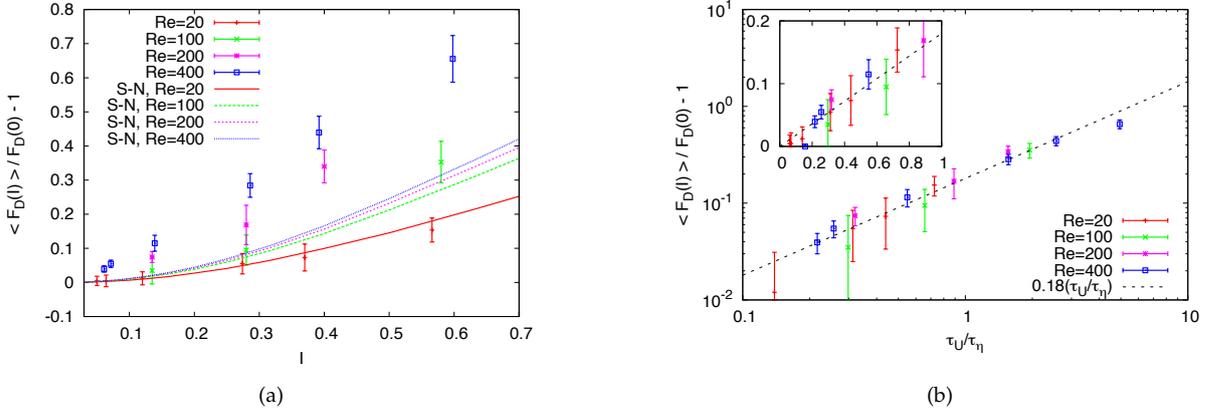


FIGURE 2.12 – (a) Déviation de la traînée moyenne par rapport à celle obtenue dans le cas laminaire en fonction de l'intensité turbulente I . (b) Idem mais représenté en fonction du rapport τ_U / τ_η avec $\tau_U = D_p / U_c$ le temps que met le fluide pour se déplacer d'un diamètre de la particule avec une vitesse U_c et $\tau_\eta = (\nu/\epsilon)^{1/2}$ le temps de dissipation de Kolmogorov.

Nous avons calculé la traînée moyenne exercée sur la particule (la poussée étant en moyenne nulle). Les données, normalisées par le cas sans fluctuation turbulente, sont représentées sur la Fig.2.12(a). On observe clairement que la force augmente avec l'intensité turbulente, comme cela a déjà été vu dans [BB03, KB12] pour toutefois des intensités bien plus faibles. Comme cela est expliqué dans [BB03], il est probable que cette augmentation de la traînée soit due à sa dépendance non-linéaire en fonction de la vitesse incidente du fluide. La vitesse de glissement instantanée de la particule est donnée par $\mathbf{U} = U_c \mathbf{e}_x + \mathcal{U}$, où la vitesse turbulente à grande échelle \mathcal{U} peut être approchée par un vecteur aléatoire gaussien de moyenne nulle et de variance u_{rms}^2 . Les fluctuations de \mathcal{U} peuvent être responsables d'une augmentation de \mathbf{F} . En effet, on peut faire l'hypothèse que la dépendance instantanée de \mathbf{F} en \mathbf{U} est donnée par l'approximation de Schiller et Naumann (2.13), de telle sorte que

$$\mathbf{F} \approx \mathbf{F}^{SN}(\mathbf{U}) = 3\pi D_p \nu \left[1 + 0.15 \left(\frac{|\mathbf{U}| D_p}{\nu} \right)^{0.687} \right] \mathbf{U}. \quad (2.22)$$

La moyenne de cette force est alignée avec la direction x et a pour amplitude

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{F}}^{SN}(I) &= \frac{1}{(\sqrt{2\pi} u_{rms})^3} \int \mathbf{F}^{SN}(\mathbf{U}) e^{-|\mathcal{U}|^2 / (2u_{rms}^2)} d^3\mathcal{U} \\ &= 3\pi D_p \nu U_c \mathbf{e}_x \left[1 + \frac{0.15 Re_p^{0.687}}{(2\pi)^{3/2}} \int (1 + I v_1) |e_x + I \mathbf{v}|^{0.687} e^{-|\mathbf{v}|^2 / 2} d^3\mathbf{v} \right]. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Bien que cette intégrale ne puisse pas être écrite de façon explicite, on peut aisément voir qu'elle prédit une augmentation relative de la force donnée par $\Delta^{SN}(I) = \overline{\mathbf{F}}^{SN}(I) / \overline{\mathbf{F}}^{SN}(0) - 1 \simeq C I^2$ où $C \approx 0.45 Re_p^{0.687} / (1 + 0.15 Re_p^{0.687}) > 0$. Aussi, il est surprenant de constater que l'approximation (2.23) ne dépend pas du nombre de Reynolds du fluide Re mais seulement des deux autres paramètres sans dimension I et Re_p . La prédiction (2.23) est représentée par des lignes continues sur la Fig. 2.12(a). Bien qu'elle donne une approximation assez bonne pour des particules avec des nombres de Reynolds modérés, elle sous-estime clairement les observations pour $Re_p \gtrsim 100$. Les écarts pourraient être liés à l'impossibilité de cette approche de prendre en compte la dépendance en Re .

Une autre façon heuristique de comprendre l'effet des perturbations turbulentes consiste à considérer la modification des valeurs typiques du gradient de vitesse au voisinage de la particule. Dans le cas laminaire (quand $I = 0$), le champ de vitesse autour de la particule varie typiquement sur des échelles de l'ordre du diamètre D_p . Le gradient non-perturbé est donc $\sim U_c / D_p$. Lorsque l'on perturbe de façon turbulente cet écoulement, la valeur typique du gradient devient $u_\eta / \eta = \tau_\eta^{-1} = \nu^{-1/2} \epsilon^{1/2}$. Ces gradients

apparaissent dans les forces visqueuses agissant sur la particule et aussi, à l'ordre dominant, dans le gradient de pression via l'équation de Poisson. Ces considérations portent à penser que les corrections à la traînée pourraient être $\propto \tau_\eta^{-1}$, alors que dans le cas d'un écoulement amont laminaire ($I = 0$), elles devraient être $\propto \tau_U^{-1}$ où $\tau_U = D_p/U_c$. De tels arguments permettent de prédire que l'accroissement relatif $\Delta(I)$ de la force de traînée devrait être $\propto \tau_U/\tau_\eta = I^2 Re_p Re^{-1/2}$. La figure 2.12(b) montre $\Delta(I)$ en fonction de τ_U/τ_η ; on y voit que les courbes se superposent à $\Delta(I) = 0.18(\tau_U/\tau_\eta)$, ce qui donne de l'évidence en faveur de ces arguments. Notons que cette approche donne de nouveau un comportement $\propto I^2$ aux petites valeurs de l'intensité turbulente mais avec cette fois un pré-facteur qui dépend explicitement du nombre de Reynolds de l'écoulement porteur.

Il y a donc au moins deux mécanismes différents qui expliquent l'augmentation de la traînée par la turbulence incidente : sa dépendance non-linéaire en fonction de la vitesse à grande échelle et les modifications de la couche limite autour de la particule par les fluctuations turbulentes à petite échelle. Il se pourrait que ces deux effets coexistent pour des intensités turbulentes faibles. Toutefois, les données montrent que l'augmentation de la traînée dépend fortement du nombre de Reynolds de l'écoulement porteur. Cet effet n'est pas décrit par la première approche. De plus, la superposition des courbes de la Fig. 2.12(b) étaye l'importance des effets de cisaillement.

Le rapport entre les contributions respectives F_v et F_p des forces visqueuses et de pression est lui bien plus sensible à Re_p que la valeur moyenne de la traînée. La figure 2.13(a) représente leur rapport normalisé $\alpha(I) = \langle F_p(I) \rangle / \langle F_v(I) \rangle$ en fonction de l'intensité turbulente. Pour la plus petite valeur du nombre de Reynolds de la particule ($Re_p = 20$), la contribution des forces de pression augmente avec I . Pour le plus grand nombre de Reynolds ($Re_p = 400$), c'est l'inverse. Pour la configuration intermédiaire $Re_p = 100$ ce rapport est plus ou moins indépendant de l'intensité turbulente. Il est important de se souvenir que pour $Re_p \lesssim 100$, les forces visqueuses donnent la contribution la plus importante tandis que pour $Re_p \gg 1$, c'est la pression qui domine. D'après nos données, il semble que les fluctuations turbulentes rééquilibrent ces rapports entre la pression et la viscosité qui dépendent fortement de Re_p dans le cas laminaire. Nous verrons dans la suite que ce phénomène peut s'expliquer par les modifications de la structure moyenne de l'écoulement par les fluctuations turbulentes à petite échelle.

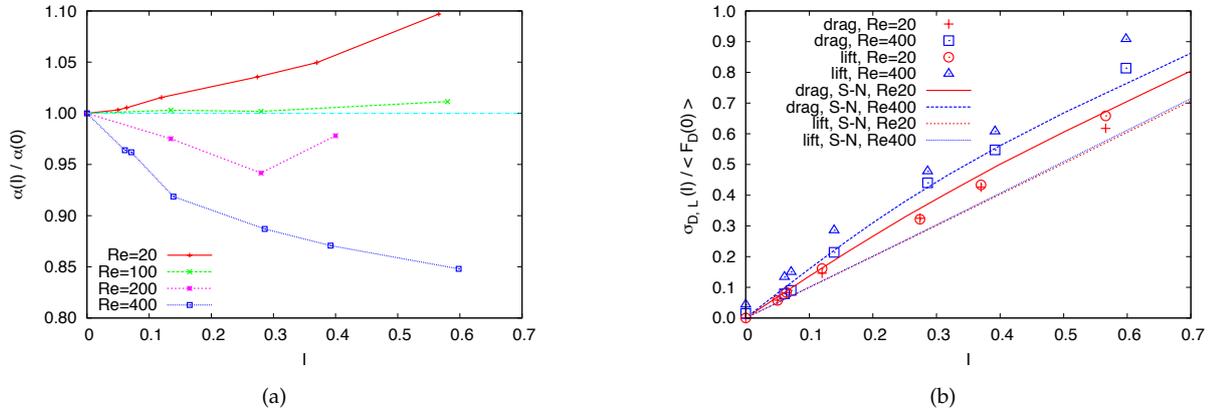


FIGURE 2.13 – (a) Rapport normalisé $\alpha(I) = \langle F_p(I) \rangle / \langle F_v(I) \rangle$ des contributions de la pression et de la viscosité à la force de traînée. (b) Écart type de la force de traînée $\sigma_D(I) = \langle [F_D(I) - \langle F_D(I) \rangle]^2 \rangle^{1/2}$ et de la poussée $\sigma_L(I) = \langle [F_L(I) - \langle F_L(I) \rangle]^2 \rangle^{1/2}$ en fonction de l'intensité turbulente. Dans les deux cas, les données sont normalisées par la valeur dans le cas laminaire ($I = 0$). Les lignes correspondent aux prédictions obtenues par la formule de Schiller–Naumann fluctuante.

Après avoir examiné les valeurs moyennes de la force, nous nous intéressons maintenant à ses fluctuations caractérisées par leur écart type. Qu'il s'agisse des forces de traînée ou de poussée, nous observons sur la Fig. 2.13 que leur écart type augmente avec l'intensité turbulente. Les fluctuations de la force de poussée sont sensiblement plus importantes que celles de la traînée, comme cela est aussi observé dans [BB03]. Vu que l'écoulement amont est isotrope, cette différence ne peut être attribuée qu'à la couche limite et au sillage de la particule. En utilisant l'approche décrite ci-dessus, nous avons utilisé la relation de Schiller–Naumann pour écrire l'équivalent de (2.23) mais cette fois pour l'écart type de la force; les prédictions en résultant sont montrées par des courbes sur la Fig. 2.13(b). Il est intéressant de remarquer que cette approche donne des résultats assez raisonnables, ce qui indique que les fluctuations sont essentiellement dues à la variabilité des grandes échelles de la turbulence.

Nous passons maintenant à l'étude de l'impact des fluctuations turbulentes sur la couche limite et le sillage moyens. Comme nous l'avons déjà mentionné, le sillage de la particule est raccourci en présence

de fluctuations turbulente en amont. Les données sont représentées sur la Fig. 2.14(a). Déjà des intensités turbulentes de 0.3-0.4 sont suffisantes pour diviser par deux la taille du sillage. L'augmentation du gradient moyen dans le voisinage aval de la particule est en accord avec les résultats obtenus sur l'augmentation de la traînée. De tels gradients augmentent les contraintes, qui à leur tour conduisent à un accroissement de la traînée visqueuse. Nous avons aussi observé que le profil moyen de pression est lui aussi modifié par cette augmentation des gradients. La pression surfacique en aval décroît avec l'intensité turbulente tandis que celle en amont reste quasi inchangée. La contribution de la pression à la traînée augmente donc elle aussi avec I . Remarquons toutefois que le rapport entre ces deux contributions dépend du nombre de Reynolds de la particule (voir Fig. 2.13(b)).

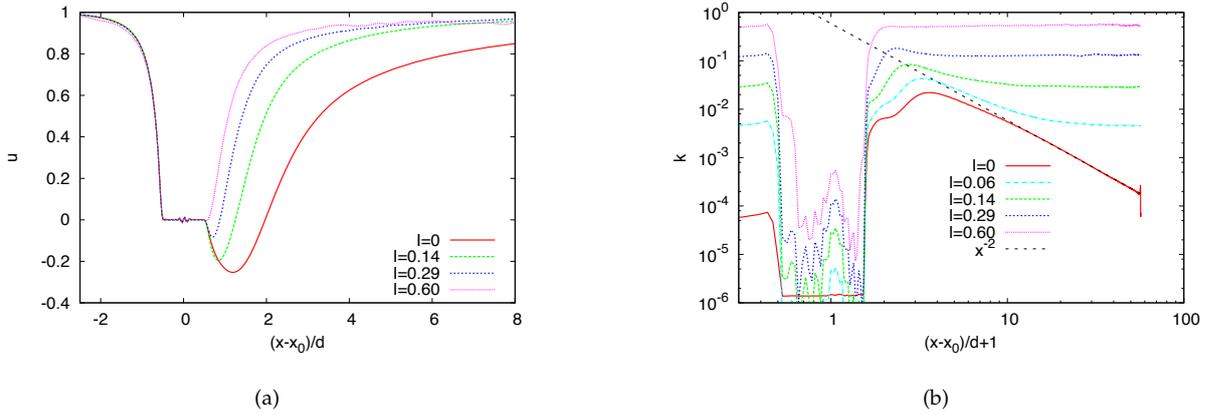


FIGURE 2.14 – (a) Profils moyens de la vitesse le long de l'axe de symétrie pour $Re_p = 400$ et différentes valeurs de l'intensité turbulente. (b) Énergie cinétique turbulente moyenne le long de l'axe de symétrie pour $Re_p = 400$.

Pour comprendre de façon plus quantitative les modifications du sillage pour $I \ll 1$, il est possible de décomposer le champ de vitesse comme $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}'$, où \mathbf{u}_0 est la vitesse obtenue dans le cas laminaire (pour $I = 0$), qui contient le sillage possiblement turbulent et \mathbf{u}' désigne la perturbation due à la turbulence en amont ($\mathbf{u}' = 0$ quand $I = 0$). Lorsque l'on effectue une moyenne par rapport aux fluctuations turbulentes, le profil de vitesse moyen est alors la somme entre un profil non-perturbé $\mathbf{U}_0 = \overline{\mathbf{u}_0}$ et celui de la perturbation moyenne $\mathbf{U}' = \overline{\mathbf{u}'}$ qui s'annule loin de la particule. On peut aisément vérifier qu'en écrivant la moyenne de Reynolds des équations de Navier-Stokes, ces vitesses satisfont à l'ordre dominant en I

$$\mathbf{U}' \cdot \nabla \mathbf{U}_0 + \mathbf{U}_0 \cdot \nabla \mathbf{U}' - \nu \nabla^2 \mathbf{U}' = -\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}' + \nabla P', \quad \nabla \cdot \mathbf{U}' = 0, \quad (2.24)$$

où $\boldsymbol{\tau}'$ désigne le tenseur de Reynolds défini par $\tau'_{ij} = \overline{u'_i u'_j}$ et P' est la correction à la pression moyenne due à la présence de la turbulence amont. On peut voir d'après (2.24) que la perturbation \mathbf{U}' provient des contraintes de Reynolds. La pression n'est là que pour maintenir l'incompressibilité. Estimons maintenant l'ordre de grandeur des différents termes apparaissant dans (2.24). Clairement, \mathbf{U}_0 est du même ordre que la vitesse amont moyenne U_c et varie sur des échelles de l'ordre du diamètre D_p de la particule. La perturbation moyenne \mathbf{U}' a une amplitude inconnue U' que nous cherchons à caractériser. Aussi, \mathbf{U}' varie sur des échelles de l'ordre de ℓ qui sont différentes de D_p . Les observations suivantes nous permettent de mieux estimer cette échelle. On s'attend à ce que toutes les structures turbulentes de taille $r \lesssim D_p$ dans le voisinage de la particule soient affectées par sa présence. Lorsqu'elles sont advectionnées en aval de celle-ci, elles doivent retrouver leur caractéristiques turbulentes pour des temps plus longs que le temps de retournement $\tau_r \sim \varepsilon^{-1/3} \nu^{2/3}$. L'échelle ℓ de variation de la perturbation \mathbf{U}' du sillage est donnée par la distance en aval parcourue par le plus grand des tourbillons avant d'avoir oublié qu'il avait rencontré la particule. On doit alors faire la distinction entre deux cas selon que D_p plus grand ou plus petit que l'échelle de dissipation η de la turbulence amont. Avec de telles considérations phénoménologiques, on a

— Si $D_p \gg \eta$, alors $\ell \sim U_c \tau_{D_p} \sim U_c \varepsilon^{-1/3} D_p^{2/3}$ et $\ell/D_p \sim I^{-4/3} Re^{1/3} Re_p^{-1/3}$. Les termes du membre de droite de (2.24) ont alors pour ordres de grandeur :

$$\begin{aligned} \mathbf{U}' \cdot \nabla \mathbf{U}_0 &\sim U' U_c / D_p, \\ \mathbf{U}_0 \cdot \nabla \mathbf{U}' &\sim U_c U' / \ell \sim (U' U_c / D_p) (D_p / \ell) \sim (U' U_c / D_p) I^{4/3} Re^{-1/3} Re_p^{1/3}, \\ \nu \nabla^2 \mathbf{U}' &\sim \nu U' / \ell^2 \sim (U' U_c / D_p) (D_p / \ell)^2 Re_p^{-1} \sim (U' U_c / D_p) I^{8/3} Re^{-2/3} Re_p^{-1/3}, \\ \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} &\sim u_{\text{rms}}^2 / \ell \sim (U_c^2 / D_p) I^{10/3} Re^{-1/3} Re_p^{1/3}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Lorsque $Re \gg 1$, $Re_p \gg 1$ et $I \lesssim 1$, on a toujours $I Re^{-1/4} \ll Re_p^{1/2}$, de telle sorte que le terme visqueux est négligeable par rapport à $U_0 \cdot \nabla U'$. Une des deux premières quantités doit donc équilibrer les contraintes de Reynolds.

- Si $D_p \ll \eta$, alors $I Re^{-1/4} \ll Re_p^{-1}$ et la situation est différente : à l'échelle de la particule, l'écoulement turbulent apparaît comme un gradient uniforme dont le temps de corrélation est τ_η . L'échelle de variation de la perturbation du sillage est alors $\ell \sim U_c \tau_\eta$, de telle sorte que $\ell/D_p \sim I^{-4/3} Re^{1/2} Re_p^{-1}$. L'ordre de grandeur des différents termes de (2.24) est alors

$$\begin{aligned} U' \cdot \nabla U_0 &\sim U' U_c / D_p, \\ U_0 \cdot \nabla U' &\sim (U' U_c / D_p) I^{4/3} Re^{-1/2} Re_p, \\ \nu \nabla^2 U' &\sim (U' U_c / D_p) I^{8/3} Re^{-1}, \\ \nabla \cdot \tau &\sim u_{\text{rms}}^2 / \ell \sim (U_c^2 / D_p) I^3 Re^{-1/4} Re_p. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Dans ce cas, le terme visqueux est de nouveau sous-dominant. On peut aisément vérifier que le terme $U' \cdot \nabla U_0$ est toujours dominant et doit donc équilibrer les contraintes de Reynolds.

Pour conclure, ces deux conditions et l'équilibrage entre les différents termes conduit à considérer trois cas différents :

- A : $I Re^{-1/4} \ll Re_p^{-1}$. Cela correspond aux valeurs des paramètres telles que $D_p \ll \eta$. L'effet dominant qui équilibre les contraintes de Reynolds est l'étirement de la perturbation U' par l'écoulement moyen U_0 . Les échelles de la perturbation sont de l'ordre de $\ell/D_p \sim I^{-4/3} Re^{1/2} Re_p^{-1} \gg 1$ et son amplitude est $U'/U_c \sim I^4 Re^{-1/2} Re_p$.
- B : $Re_p^{-1} \ll I Re^{-1/4} \ll Re_p^{-1/4}$. Cela correspond maintenant à $D_p \gg \eta$. L'effet dominant est de nouveau l'étirement de la perturbation U' par l'écoulement moyen U_0 . Toutefois, l'échelle de la perturbation est cette fois-ci $\ell/D_p \sim I^{-4/3} Re^{1/3} Re_p^{-1/3} \gg 1$ et son amplitude peut être écrite comme $U'/U_c \sim I^{10/3} Re^{-1/3} Re_p^{1/3}$.
- C : $I Re^{-1/4} \gg Re_p^{-1/4}$. Nous avons toujours $D_p \gg \eta$ mais l'effet dominant est maintenant l'advection de la perturbation U' par l'écoulement moyen U_0 . L'échelle de la perturbation est encore $\ell/d \sim I^{-4/3} Re^{1/3} Re_p^{-1/3} \ll 1$ mais son amplitude est maintenant $U'/U_c \sim I^2$ et est donc indépendante de Re et de Re_p .

De façon surprenante, les transitions entre ces différents régimes ne dépendent que de deux paramètres : le nombre de Reynolds de la particule Re_p et le produit $I Re^{-1/4}$. À noter que toutes nos configurations correspondent au régime B dans l'espace des paramètres. Ceci peut s'expliquer par le fait que dans un état turbulent et pour une intensité I fixée, atteindre le régime A demanderait une très grande valeur de Re et atteindre le régime C, une très grande valeur de Re_p . Dans les deux cas, cela augmenterait de manière significative la résolution nécessaire.

Dans le régime B qui correspond à nos simulations, l'échelle ℓ de la perturbation du profil moyen de vitesse est bien plus grande que le diamètre de la particule. Cela implique que l'ensemble du sillage se voit perturbé, y compris le voisinage immédiat de la particule. Aussi, dans ce régime, la perturbation normalisée du gradient moyen a pour ordre de grandeur $(U'/\ell)/(U_c/D_p) \sim I^{14/3} Re^{-2/3} Re_p^{2/3}$, qui croît rapidement avec l'intensité turbulente I . Ces arguments semblent confirmer nos spéculations sur les modifications à petite échelle de la couche limite par les perturbations turbulentes et à l'augmentation associée de la traînée moyenne. Toutefois, il a été montré dans [MLM05] que l'ensemble des échelles turbulentes contribue aux forces agissant sur une bulle. Il est donc possible que l'échelle caractéristique ℓ introduite ci-dessus se propage à l'ensemble des échelles inertielles.

Pour compléter ces résultats et tourner la page des particules fixes, ajoutons quelques commentaires sur les comportements observés en amont et en aval de la particule. Le profil en amont n'est pas modifié de façon significative par les perturbations turbulentes tandis que le sillage est fortement modifié (voir Fig. 2.14(a)). En amont on observe assez nettement une loi de puissance pour la dépendance du déficit de vitesse en fonction de la distance au centre de la particule. L'exposant mesuré varie entre ≈ -2.5 pour $Re_p = 20$ et ≈ -3 pour $Re_p = 400$ et semble indépendant de l'intensité turbulente. Les gradients dans la couche limite introduits par les perturbations turbulentes sont toujours sous-dominants en amont et n'altèrent donc pas la couche limite amont moyenne. En même temps, le profil en aval change à la fois avec le nombre de Reynolds de la particule et avec l'intensité turbulente. Toutefois, on trouve toujours un déficit de vitesse $\propto x^{-1}$ pour les grands nombres de Reynolds, indépendamment de I . Aussi, on voit sur la Fig. 2.14(b) un déclin intermédiaire en x^{-2} de l'énergie cinétique turbulente qui est absorbé par la turbulence externe lorsque I augmente.

2.2.2 Dynamique de particules de tailles inertielles et de flottabilité nulle

Nous nous intéressons dans cette section au cas de particules solides sphériques qui se déplacent avec l'écoulement. Leurs trajectoires $\mathbf{X}_p(t)$ sont alors données par les équations de Newton pour leur vitesse de translation \mathbf{V}_p et de rotation $\mathbf{\Omega}_p$. Lorsqu'elles sont de même densité que le fluide, on parle alors de particules de flottabilité nulle et ces équations s'écrivent

$$\frac{d\mathbf{V}_p}{dt} = \frac{3}{4\pi D_p^3} \int_{\partial\mathcal{B}} \mathbb{T} \cdot d\mathcal{S} \quad (2.27)$$

$$\mathcal{I} \frac{d\mathbf{\Omega}_p}{dt} = \frac{15}{4\pi D_p^4} \int_{\partial\mathcal{B}} \mathbf{n} \times (\mathbb{T} \cdot d\mathcal{S}), \quad (2.28)$$

où $\partial\mathcal{B}$ désigne la surface de la particule sphérique de diamètre D_p et de vecteur normal unitaire \mathbf{n} ; l'élément surfacique vectorielle d'intégration est noté $d\mathcal{S} = \mathbf{n} dS$; le tenseur \mathbb{T} correspond aux contraintes du fluide et s'écrit $\mathbb{T} = -p \mathbf{1}_3 + \nu (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^\top) + \mathbb{F}$, avec $\mathbf{1}_3$ le tenseur unité et \mathbb{F} le tenseur des contraintes des forces volumiques externes appliquées à l'écoulement pour le maintenir dans un état turbulent statistiquement stationnaire. Ce système est associé aux équations de Navier–Stokes pour le fluide qui satisfont la condition de bord de non-glisement à la surface $\partial\mathcal{B}$ de la particule :

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}_p(t) + (D_p/2) \mathbf{n}, t) = \mathbf{V}_p(t) + (D_p/2) \mathbf{\Omega}_p(t) \times \mathbf{n}, \quad \forall \mathbf{n} : |\mathbf{n}| = 1. \quad (2.29)$$

Pour résoudre numériquement le système fluide+particule, nous utilisons la méthode de pénalisation spectrale décrite dans la section précédente. La force exercée par le fluide sur la particule et son moment angulaire sont calculés explicitement, ce qui permet d'intégrer simultanément au fluide le système (2.27)-(2.28). Nous nous intéressons dans cette section aux propriétés dynamique d'une particule isolée. Pour cela nous n'avons qu'une unique particule dans chacune de nos simulations pour avoir la certitude de ne pas être contaminés par de possibles effets collectifs. Notre algorithme permet toutefois de traiter sans difficulté le cas de plusieurs particules, à condition de choisir une modélisation adéquate de leurs interactions à courte portée (collisions, forces de lubrification...).

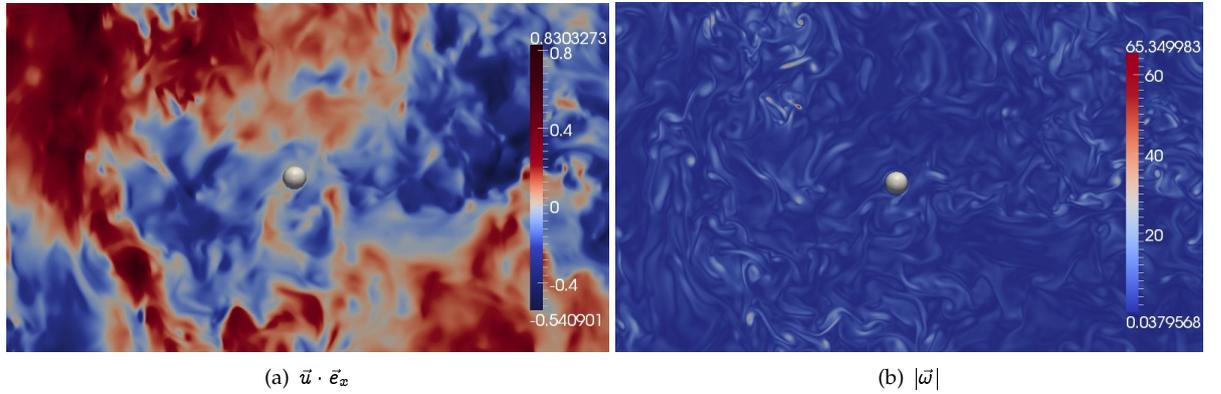


FIGURE 2.15 – Instantané d'une des composantes de la vitesse (a) et du module de la vorticité (b) dans une fine tranche de l'écoulement autour de la particule.

La figure 2.15 montre au même instant une composante de la vitesse (a) et le module de la vorticité (b) dans un plan de l'écoulement tridimensionnel passant par le centre d'une particule de diamètre $D_p = 34\eta$. On voit clairement dans les deux cas que l'écoulement autour de la particule varie sur des échelles de l'ordre de son diamètre, aussi bien pour les fluctuations de quantités à petite qu'à grande échelle. Ceci met en exergue l'une des questions essentielles pour la compréhension de la dynamique des particules de taille finie, à savoir comment définir la vitesse du fluide à la position de la particule. Cette quantité est particulièrement importante pour évaluer le mouvement relatif (la vitesse de glissement) de la particule par rapport à l'écoulement porteur. Comme nous le verrons par la suite, la seule approche analytique aujourd'hui connue repose sur un développement de Taylor spatial du champ de vitesse du fluide à la position de la particule qui conduit à une formulation en termes de corrections de Fax n des équations du mouvement pour les particules [Gat83, MR83]. Nous avons montré qu'un modèle basé sur les quantités au centre des particules ne reproduit pas l'effet de taille qui a été mesuré expérimentalement et que les corrections de Fax n capturent ces effets pour des diamètres allant jusqu'à quatre fois l'échelle de Kolmogorov [HB10]. La statistique des particules plus grosses coïncide

avec les prédictions dimensionnelles. Pour les particules dont les diamètres sont bien à l'intérieur de la gamme d'échelles inertielles de la turbulence, nous avons utilisé dans [CHB13] la vitesse du fluide dans différentes coquilles concentriques autour de la particule pour définir la direction de glissement et estimer la vitesse de celui-ci ainsi qu'un nombre de Reynolds moyen de la particule. Cette approche est résumée dans la suite de cette section. Finalement, des arguments dimensionnels sont utilisés pour tirer une analogie entre les modifications de l'écoulement par la particule et les écoulements au voisinage d'une paroi. Ceci nous permet de prédire la présence de différents régimes de la couche limite turbulente autour de la particule (couche visqueuse, couche intermédiaire, couche logarithmique) qui est confirmée par nos simulations numériques. Un résultat important est que la sphère n'a qu'un rayon d'influence fini sur le fluide qui correspond à la taille de cette couche limite turbulente.

Approximation de particules ponctuelles

Les modèles de particules ponctuelles reposent sur l'hypothèse que la perturbation de l'écoulement porteur au voisinage des particules est décrite par l'équation de Stokes [Gat83, MR83, AHP88]. Pour cela, il est nécessaire que, d'une part, la vitesse du fluide n'ait pas un comportement turbulent à l'échelle de la particule, c'est-à-dire $D_p \lesssim \eta$ et, d'autre part, que le nombre de Reynolds associé à la différence de vitesse entre la particule et le fluide soit suffisamment petit. La dynamique d'une particule de même densité que le fluide est alors donnée par

$$\frac{d\mathbf{V}_p}{dt} = \frac{d\mathbf{U}^\nu}{dt} - \frac{12\nu}{D_p^2} (\mathbf{V}_p - \mathbf{U}^S) + \frac{6}{D_p} \sqrt{\frac{\nu}{\pi}} \int_{-\infty}^t \left(\frac{d\mathbf{U}^S}{ds} - \frac{d\mathbf{V}_p}{ds} \right) \frac{ds}{\sqrt{t-s}}, \quad (2.30)$$

où \mathbf{U}^S et \mathbf{U}^ν prennent en compte les corrections de Faxén. Il s'agit respectivement de moyennes de la vitesse du fluide sur la surface et le volume de la particule :

$$\mathbf{U}^S(t) = \frac{1}{\pi D_p^2} \int_{\partial\mathcal{B}} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) d\mathcal{S} \quad \text{et} \quad \mathbf{U}^\nu(t) = \frac{6}{\pi D_p^3} \int_{\mathcal{B}} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) d\mathcal{V}. \quad (2.31)$$

Les différents termes apparaissant dans (2.30) sont, dans l'ordre, la combinaison des termes d'inertie du volume de fluide déplacé et de la masse ajoutée, le frottement visqueux de Stokes, et le terme d'histoire de Basset–Boussinesq. Vu que cette approche suppose que la particule est bien plus petite que l'échelle dissipative de Kolmogorov, elle est aussi bien plus petite que la micro-échelle de Taylor dans les écoulements en turbulence développée. Un développement de Taylor au voisinage du centre de la particule conduit à

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^S(t) &= \mathbf{u}(\mathbf{X}_p, t) + (1/40) D_p^2 \nabla^2 \mathbf{u}(\mathbf{X}_p, t) + \mathcal{O}[(D_p/\lambda)^4], \\ \mathbf{U}^\nu(t) &= \mathbf{u}(\mathbf{X}_p, t) + (1/24) D_p^2 \nabla^2 \mathbf{u}(\mathbf{X}_p, t) + \mathcal{O}[(D_p/\lambda)^4]. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Vu que la particule est supposée bien plus petite que η , on peut montrer que le terme d'histoire de Basset–Boussinesq donne une contribution bien plus petite que le frottement visqueux et peut donc être négligé à l'ordre dominant. Ainsi la dynamique des particules de flottabilité nulle suit asymptotiquement le modèle minimal

$$\frac{d\mathbf{V}_p}{dt} = \frac{D\mathbf{u}}{Dt}(\mathbf{X}_p, t) - \frac{12\nu}{D_p^2} [\mathbf{V}_p - \mathbf{u}(\mathbf{X}_p, t)]. \quad (2.33)$$

où $D/Dt = \partial_t + \mathbf{u} \cdot \nabla$ est la dérivée temporelle totale le long des trajectoires des traceurs du fluide. Dans ce modèle, le diamètre des particules n'entre que dans le coefficient devant la force de traînée. Toutefois, comme nous allons maintenant le voir, ceci n'est pas suffisant pour prendre en compte les effets d'une taille finie de la particule. En suivant l'approche proposée dans [BCPP00], on peut introduire la différence de vitesse $\mathbf{W}(t) = \mathbf{V}_p(t) - \mathbf{u}(\mathbf{X}_p(t), t)$ dont on peut aisément montrer qu'elle est solution de

$$\frac{d\mathbf{W}}{dt} = -\mathbf{W} \cdot \nabla \mathbf{u}(\mathbf{X}_p(t), t) - \frac{12\nu}{D_p^2} \mathbf{W}. \quad (2.34)$$

Ceci implique que $\mathbf{W}(t) = \exp(-12\nu t/D_p^2) \mathcal{T} \exp[-\int_0^t \nabla \mathbf{u}(\mathbf{X}_p(s), s) ds] \mathbf{W}(0)$, où $\mathcal{T} \exp$ désigne l'exponentielle ordonnée. Ainsi, l'amplitude de la différence de vitesse croît de manière exponentielle aux temps longs, c'est-à-dire $|\mathbf{W}(t)| \simeq |\mathbf{W}(0)| \exp[-(12\nu/D_p^2 + \lambda_3) t]$, où λ_3 est le plus petit exposant de Lyapunov associé à $\mathcal{T} \exp[-\int_0^t \nabla \mathbf{u}(\mathbf{X}_p(s), s) ds]$. L'incompressibilité du champ de vitesse du fluide implique que la somme des trois exposants de Lyapunov est nulle et ainsi que $\lambda_3 \leq 0$. Toutefois, lorsque D_p est suffisamment petit, c'est-à-dire pour $D_p \leq \sqrt{12\nu/|\lambda_3|}$, le taux de croissance exponentielle de

$|W|$ est négatif et la vitesse des particules relaxe donc vers celle du fluide. Pour estimer la valeur de λ_3 , on doit en principe mesurer le gradient de vitesse du fluide le long des trajectoires de particules. Cependant, vu que les trajectoires des particules relaxent exponentiellement vers le fluide, l'exposant λ_3 est exactement celui qui est donné par la dynamique des traceurs. Il a été évalué dans [BBB⁺06b] (voir section 4.2.1) et, une fois normalisé par l'inverse du temps de dissipation de Kolmogorov τ_η , il dépend faiblement du nombre de Reynolds de l'écoulement : pour R_λ variant de 65 à 185, on observe $\tau_\eta \lambda_3 = 0.190 \pm 2\%$. En résumé, les arguments ci-dessus montrent que le modèle minimal (2.33) donne exactement la dynamique des traceurs dès que leur taille satisfait

$$\Phi = D_p/\eta \leq \Phi^* = \sqrt{12/(\tau_\eta \lambda_3)} \approx 8. \quad (2.35)$$

Ainsi, pour $\Phi \leq \Phi^*$, les effets dominants de taille finie ne sont pas dus à l'inertie mais viennent forcément des termes que nous avons négligé dans ce modèle. Cette observation explique peut-être pourquoi des particules de flottabilité nulle dont la dynamique est approchée par (2.33) ne montrent pas de propriétés de concentration [CKLT08].

Estimons maintenant la contribution des termes que nous avons négligé, à savoir les corrections de Faxén et le terme d'histoire de Basset-Boussinesq. Pour cela, on suit l'approche de [Max87] développée et déjà utilisée précédemment pour les petits nombres de Stokes pour écrire l'Ansatz perturbatif $V_p(t) = \mathbf{u}(\mathbf{X}_p(t), t) + (D_p/\lambda)^\alpha \mathbf{f}(t) + o[(D_p/\lambda)^\alpha]$, où l'ordre α et la fonction \mathbf{f} doivent être déterminés. En insérant ce Ansatz dans (2.30) et (2.32), on obtient que les termes du premier ordre proviennent des corrections de Faxén à la traînée de Stokes. On a ainsi $\alpha = 2$ et

$$\mathbf{V}_p(t) = \mathbf{u}(\mathbf{X}_p(t), t) + (D_p^2/40) \nabla^2 \mathbf{u}(\mathbf{X}_p(t), t) + \mathcal{O}[(D_p/\lambda)^4]. \quad (2.36)$$

On peut remarquer que le champ de vitesse synthétique que l'on a obtenu ci-dessus est de divergence nulle, ce qui signifie qu'aucun effet de concentration ne peut être détecté grâce aux corrections du premier ordre. La forme asymptotique (2.36) implique que la variance de la vitesse des particules satisfait

$$\langle |\mathbf{V}_p|^2 \rangle - \langle |\mathbf{u}|^2 \rangle \simeq (D_p^2/20) \langle \mathbf{u} \cdot \nabla^2 \mathbf{u} \rangle = -(D_p^2/20)(\varepsilon/\nu) = -(\langle |\mathbf{u}|^2 \rangle/100) (D_p/\lambda)^2, \quad (2.37)$$

où ε est le taux turbulent moyen de dissipation d'énergie cinétique. La variance de l'accélération des particules est quant à elle donnée par la dérivée temporelle de (2.36)

$$\left\langle \left| \frac{d\mathbf{V}_p}{dt} \right|^2 \right\rangle - \left\langle \left| \frac{D\mathbf{u}}{Dt} \right|^2 \right\rangle \simeq -\frac{D_p^2}{20} \left\langle \left\| \frac{D\nabla \mathbf{u}}{Dt} \right\|^2 \right\rangle = -\frac{D_p^2}{20} \left\langle \frac{1}{\rho_f^2} (\nabla^2 p)^2 + \nu^2 \|\nabla^2 \nabla \mathbf{u}\|^2 \right\rangle, \quad (2.38)$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme tensorielle de Frobenius $\|\mathbb{M}\|^2 = \text{trace}(\mathbb{M}^T \mathbb{M})$. Les termes dominants qui apparaissent lorsque l'on écrit $d\mathbf{u}/dt$ en termes de $D\mathbf{u}/Dt$ sont exactement égaux aux termes quadratiques (étirement tourbillonnaire) qui apparaissent dans le passage de $\nabla D\mathbf{u}/Dt$ à $D\nabla \mathbf{u}/Dt$. En résumé, on s'attend à ce qu'aux petits diamètres de particule, les effets de taille finie dus aux corrections de Faxén se matérialisent comme une décroissance quadratique des deux quantités dynamiques introduites ci-dessus, avec un coefficient donné par la moyenne eulérienne de quantités turbulentes.

Simulations directes de particules avec une taille de l'ordre de η

Nous avons utilisé la méthode de pénalisation spectrale pour intégrer la dynamique de particules de même densité que le fluide avec des diamètres allant de $D_p = 2\eta$ à 14η . Pour s'assurer d'une bonne convergence de la méthode, nous avons eu besoin d'un suffisamment grand nombre de points de grille le long d'un diamètre de la particule. Cela a eu pour conséquence que les petites échelles de la turbulence sont extrêmement bien résolues dans ces simulations et que le nombre de Reynolds reste relativement petit même si un grand nombre de points de grille est utilisé (on a $R_\lambda \approx 32$ pour 512^3 points de grille ; pour plus de détails sur les paramètres des simulations, voir [HB10]). Aussi, vu que l'on ne considère qu'une seule particule isolée dans l'écoulement, la convergence statistique des quantités liées aux particules demande d'effectuer des moyennes sur des temps très longs. Chaque simulation associée à l'un des huit diamètres différents que nous avons considérés demande d'intégrer l'écoulement sur plus de 300 temps de retournement à grande échelle. Ces simulations ont ainsi coûté près de quatre millions d'heures CPU. La figure 2.16(a) représente le champ de vorticités typique dans un plan de coupe passant par le centre de la particule. On voit la signature d'un sillage turbulent sur la droite de particule.

Une référence pour ces simulations a été obtenue en effectuant un run avec exactement les mêmes paramètres mais sans particule de taille finie. Dans cette simulation nous avons intégré le mouvement de

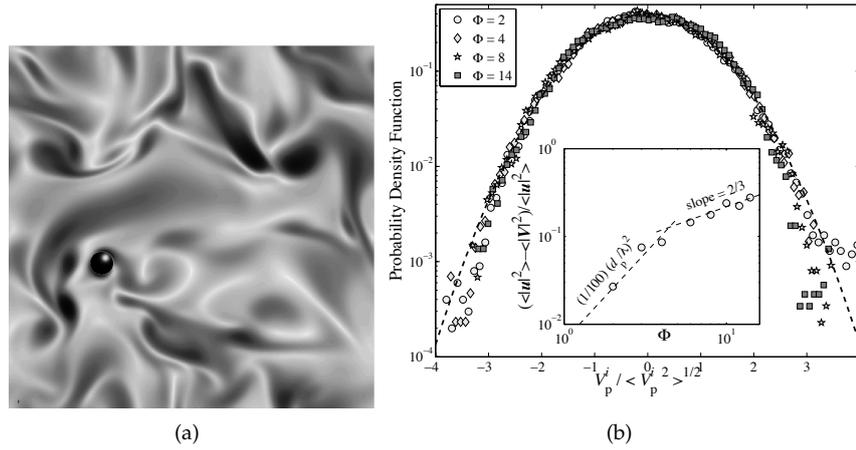


FIGURE 2.16 – (a) Module de la vorticité dans une tranche du domaine passant par le centre de la particule de diamètre $D_p = 8\eta$. (b) Densité de probabilité normalisée des composantes de vitesse de la particule pour différentes tailles de celle-ci (la ligne en tirets gras correspond à une distribution gaussienne). Encart : déviations de la variance $\langle |V_p|^2 \rangle$ de la vitesse de la particule en fonction du diamètre adimensionné $\Phi = D_p/\eta$; les deux lignes en tirets montrent la prédiction (2.37) ainsi qu'un comportement $\propto D_p^{2/3}$

traceurs et de particules ponctuelles passives dont la dynamique est donnée par (2.33). Il est intéressant de noter que les quantités moyennes turbulentes ne varient pas (aux fluctuations statistiques près) qu'il y ait ou non une particule dans l'écoulement. Nous avons ainsi utilisé la simulation sans particule pour calculer les statistiques des traceurs et les moyennes eulériennes.

La figure 2.16(b) montre la densité de probabilité des composantes de la vitesse des particules pour différents diamètres de celles-ci. Une fois normalisées par leur écart type, ces distributions se superposent les unes aux autres et dévient de façon très faible de la gaussienne. Comme cela peut être vu dans l'encart de la figure, la variance de la vitesse des particules décroît en fonction de leur taille. Aux petits diamètres, c'est-à-dire pour $\Phi = D_p/\eta \lesssim 4$, le comportement de la variance de la vitesse est bien décrit par la prédiction (2.37) obtenue à partir des corrections de Faxén. Pour $\Phi \gtrsim 4$, les déviations sont compatibles avec le comportement en loi de puissance $\propto \Phi^{2/3}$ obtenu à partir d'arguments dimensionnels de type Kolmogorov 1941. Ce comportement n'est toutefois visible que pour moins d'un tiers de décade en D_p . De plus, dans l'écoulement à faible nombre de Reynolds que nous considérons ici, il n'y a pas vraiment d'échelle inertielle au sens généralement défini en turbulence en termes de spectre ou d'incrément de vitesse.

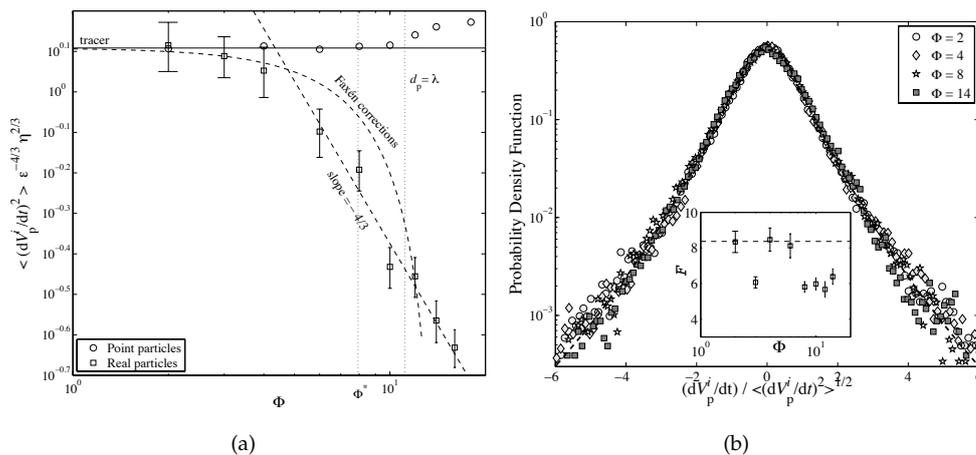


FIGURE 2.17 – (a) Variance de l'accélération de particules ponctuelles et de taille finie en fonction de $\Phi = D_p/\eta$. Les deux lignes verticales indiquent la micro-échelle de Taylor λ et la valeur critique (2.35). La courbe en tirets correspond à la prédiction (2.38). (b) Densité de probabilité normalisée des composante de l'accélération des particules pour différents diamètres. La ligne en tirets gras sur laquelle les données se superposent est l'approximation log-normal des données expérimentales proposée dans [MCB04] avec une flatness ≈ 8.37 , comme observé dans [QBB+07]. Encart : variation de la flatness \mathcal{F} de l'accélération en fonction de la taille des particules. La ligne horizontale correspond à la valeur obtenue pour les traceurs.

Nous passons maintenant aux statistiques de l'accélération. La Figure 2.17(a) représente la variance

normalisée des composantes de l'accélération $a_0 = \langle (dV_p^i/dt)^2 \rangle \epsilon^{-4/3} \eta^{2/3}$ en fonction du diamètre sans dimension $\Phi = D_p/\eta$, à la fois pour des particules réelles de taille finie et pour le modèle minimal (2.33). Pour les particules réelles, on peut distinguer deux comportements, comme dans le cas de la variance de la vitesse. Pour $\Phi = D_p/\eta \lesssim 4$, les effets de taille finie sont bien reproduits par la prédiction (2.38). À noter que, grâce à leur forme isotrope, les termes sous-dominants qui apparaissent dans (2.38) ont pu être ici estimés en utilisant les spectres de vitesse et de pression. Pour $\Phi \gtrsim 4$, on obtient un comportement qui est compatible avec $a_0 \propto D_p^{-4/3}$. Comme cela est argumenté dans [QBB⁺07], la variance de l'accélération des particules de tailles finies peut être reliée à la variance de la pression du fluide intégrée sur une sphère de diamètre D_p . La puissance $-4/3$ observée ici diffère de la valeur $-2/3$ mesurée dans [QBB⁺07]. Toutefois, comme cela a déjà été discuté dans la section 2.1.1, les lois d'échelle de la pression dans les écoulements avec un nombre de Reynolds modéré sont souvent dominées par l'entraînement par les grandes échelles, ce qui conduit à un comportement des incréments de pression $|p(x+\ell) - p(x)| \sim \ell^{1/3}$. Même si dans nos simulations, aucune loi d'échelle ne peut être détectée pour la pression et si la gamme de taille de particules que nous avons considérée est assez limitée, on ne peut pas exclure le fait que la variance de l'accélération suive la loi en $-4/3$ compatible avec un spectre de pression dominé par l'advection par les grandes échelles. On observe aussi sur la Fig. 2.17(a) que les simulations confirment la présence du seuil (2.35) prédit dans la sous-section précédente pour le modèle minimal de particule ponctuelle. Les simulations numériques des particules ponctuelles dont la dynamique est donnée par (2.33) montrent que pour $\Phi < 8$, la variance de l'accélération de ces dernières ne peut pas être distinguée de celle des traceurs. Pour $\Phi > 8$, le modèle de particules ponctuelles donne une augmentation de l'accélération, ce qui est qualitativement incompatible avec les mesures faites avec des particules réelles. Ceci montre l'inadéquation d'un tel modèle pour les particules de flottabilité nulle. Notons enfin que, dans le cas des traceurs, la constante a_0 est connue pour montrer une dépendance en nombre de Reynolds $a_0 \propto R_\lambda^{1/2}$ (voir, par exemple, [VLCB02]). La valeur mesurée d'environ 1.3 est en bon accord celle obtenue expérimentalement dans [QBB⁺07].

La figure 2.17(b) représente la densité de probabilité des composantes de l'accélération normalisée à une variance unité pour différentes valeurs du diamètre de la particule. Comme déjà souligné dans [QBB⁺07], cette distribution ne dépend que très faiblement de $\Phi = D_p/\eta$. Aux erreurs statistiques près, elles donnent l'impression de toutes se superposer. L'encart de la figure montre le coefficient d'aplatissement (flatness) de l'accélération $\mathcal{F} = \langle (dV_p^i/dt)^4 \rangle / \langle (dV_p^i/dt)^2 \rangle^2$ en fonction du diamètre des particules. La décroissance observée de $\mathcal{F} \approx 8.5$ à $\mathcal{F} \approx 6$ pour $D_p \approx 6\eta$ doit être considérée avec précaution car elle pourrait correspondre à un manque de statistiques.

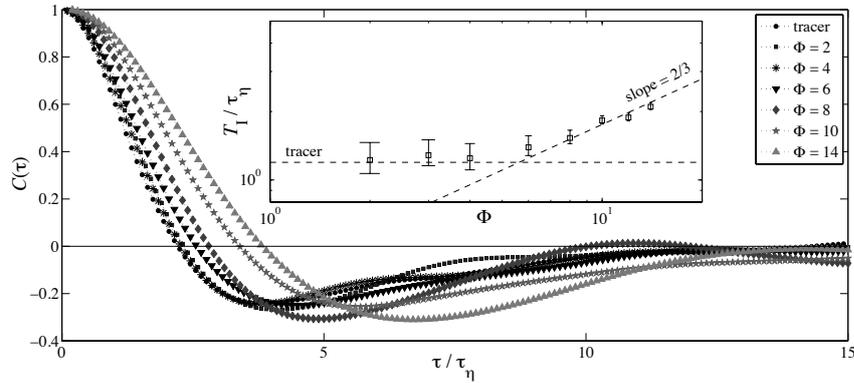


FIGURE 2.18 – Auto-corrélation temporelle $C(\tau)$ des composantes de l'accélération définie dans (2.39) pour différentes tailles de particule. Encart : temps de corrélation intégral T_1 défini par (2.40) en fonction du diamètre sans dimension $\Phi = D_p/\eta$.

Nous avons aussi effectué des mesures sur les statistiques à deux temps des particules. La figure 2.18 représente l'auto-corrélation temporelle de l'accélération

$$C(\tau) \equiv \langle (dV_p^i/dt)(t+\tau) (dV_p^i/dt)(t) \rangle / \langle (dV_p^i/dt)^2 \rangle \quad (2.39)$$

en fonction de la séparation temporelle τ pour différentes valeurs du diamètre des particules. Ces mesures numériques sont en bon accord avec les résultats de [CVB⁺09]. De façon surprenante, on observe que $C(\tau)$ ne dévie que très faiblement de l'auto-corrélation des traceurs pour des diamètres inférieurs à 4η , c'est-à-dire lorsque l'on s'attend à ce que les corrections de Faxén soient pertinentes pour décrire le premier ordre des effets de taille finie. Ce comportement est encore plus clair quand on mesure la

dépendance du temps de corrélation de l'accélération en fonction du diamètre des particules. Pour cela, on suit l'approche de [CVB⁺09] en introduisant le temps intégral

$$T_1 \equiv \int_0^{T_0} C(\tau) d\tau, \quad (2.40)$$

où T_0 est le temps du premier passage par zéro. L'encart de la Fig. 2.18 représente T_1/τ_η en fonction de $\Phi = D_p/\eta$. Pour $\Phi \lesssim 4$, ce temps de corrélation lagrangien ne peut pas être distingué, aux erreurs numériques près, de la valeur obtenue pour les traceurs. Quand $\Phi \gtrsim 4$, le temps de corrélation augmente bien plus rapidement en fonction de Φ et de manière compatible avec le comportement $T_1 \sim \Phi^{2/3}$. Ce dernier est obtenu par analyse dimensionnelle ; il correspond au temps de retournement turbulent $\sim \varepsilon^{-1/3} D_p^{2/3}$ associé à une échelle donnée par la taille de la particule.

Pour conclure la description de ces travaux et avant de passer au cas de particules dont les diamètres sont bien au delà de η , soulignons les résultats principaux. Nous avons obtenu de l'évidence numérique montrant que le premier ordre des corrections de taille finie pour des particules de flottabilité nulle est bien décrit par les termes de Faxén et non pas par l'inertie. Ceci nous a conduit à des prédictions analytiques pour les statistiques du second ordre de la vitesse des particules et de l'accélération que nous avons pu confirmer numériquement pour des particules dont les diamètres n'excèdent pas 4η . Les statistiques d'ordres plus élevés semblent bien moins sensibles aux effets de taille finie. La non pertinence de l'inertie des particules comparée aux corrections de Faxén s'accompagne du fait que les termes correctifs sont de l'ordre de D_p/λ plutôt que D_p/η ; ceci pourrait en partie expliquer les difficultés rencontrées dans [CVB⁺09] pour réussir à concilier les données numériques et expérimentales correspondant à différentes valeurs de R_λ . Finalement, pour les particules avec des diamètres plus grands que $\approx 4\eta$, la physique des échelles inertielles de la turbulence semble entrer en jeu. Comme nous allons maintenant le voir, ceci est confirmé par d'autres simulations numériques que nous avons effectuées dans des configurations plus amènes à étudier $D_p \gg \eta$.

Mouvement de glissement

Nous résumons ici les résultats obtenus dans [CHB13] sur les particules de taille plus grande. Nous avons effectué trois simulations avec 1024^3 points de grille d'un écoulement en turbulence homogène isotrope stationnaire avec $R_\lambda \approx 160$. Ces simulations contiennent chacune une particule de flottabilité nulle avec les différents diamètres $D_p \simeq 17, 34$ et 67η .

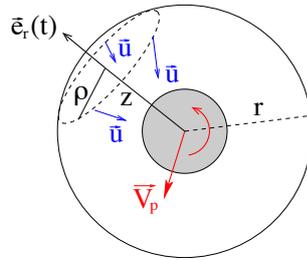


FIGURE 2.19 – Schéma de la définition de la direction de glissement e_r sur une coquille de rayon r et système de coordonnées instantané (ρ, z) qui lui est associé.

Notre but est ici de définir une direction instantané pour le mouvement relatif de la particule par rapport au fluide. L'idée que nous avons proposée est d'évaluer cette direction dans différentes coquilles qui entourent la particule et à différents instants. Pour cela, nous avons sauvegardé avec une fréquence suffisamment élevée, en plus des positions, vitesses et taux de rotation des particules, le champ de vitesse du fluide sur différentes sphères concentriques centrées sur la particule. Sur la coquille S_r située à une distance r de la surface de la particule, on définit alors la direction du mouvement comme

$$e_r(t) = \Phi_r(t)/|\Phi_r(t)|, \quad \text{avec} \quad \Phi_r(t) = \int_{S_r} (\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{V}_p(t)) \cdot \mathbf{n} dS, \quad (2.41)$$

où \mathbf{u} et \mathbf{V}_p sont respectivement la vitesse du fluide et la vitesse de translation de la particule et \mathbf{n} est le vecteur unitaire normal à la coquille (voir Fig. 2.19). En d'autres termes, on effectue sur chaque coquille une moyenne de la direction pondérée par le flux de masse du fluide, de telle sorte que e_r pointe dans la direction du flux à une distance r . Ce choix est physiquement motivé par le fait que le fluide

entre dans une telle coquille en amont et en sorte dans le sillage. Si la particule se déplaçait dans un écoulement laminaire, la direction e_r serait par symétrie indépendante de r et alignée exactement avec ce mouvement. Lorsque la particule crée un sillage dans un écoulement non-stationnaire, $e_r(t)$ dépend à la fois du temps et de la distance r à la particule. Une fois que la direction e_r est définie, il est possible de projeter sur elle la différence de vitesse $\mathbf{u} - \mathbf{V}_p$ et d'effectuer une moyenne temporelle pour définir le profil de vitesse moyen de l'écoulement du fluide par rapport à la particule

$$U_{\text{rel}}(\rho, z) = \langle (\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{V}_p(t)) \cdot \mathbf{e}_r \rangle, \quad (2.42)$$

avec $z = (\mathbf{x} - \mathbf{X}_p(t)) \cdot \mathbf{e}_r$, $\rho = [|\mathbf{x} - \mathbf{X}_p(t)|^2 - z^2]^{1/2}$ et $\langle \cdot \rangle$ désignant la moyenne temporelle. Les coordonnées z et ρ , qui sont définies pour chaque instant, sont respectivement dans la direction de e_r et perpendiculaire à celle-ci. Par symétrie de rotation autour de l'axe défini par e_r , le profil moyen U_{rel} ne dépend que de z et ρ et pas de l'angle.

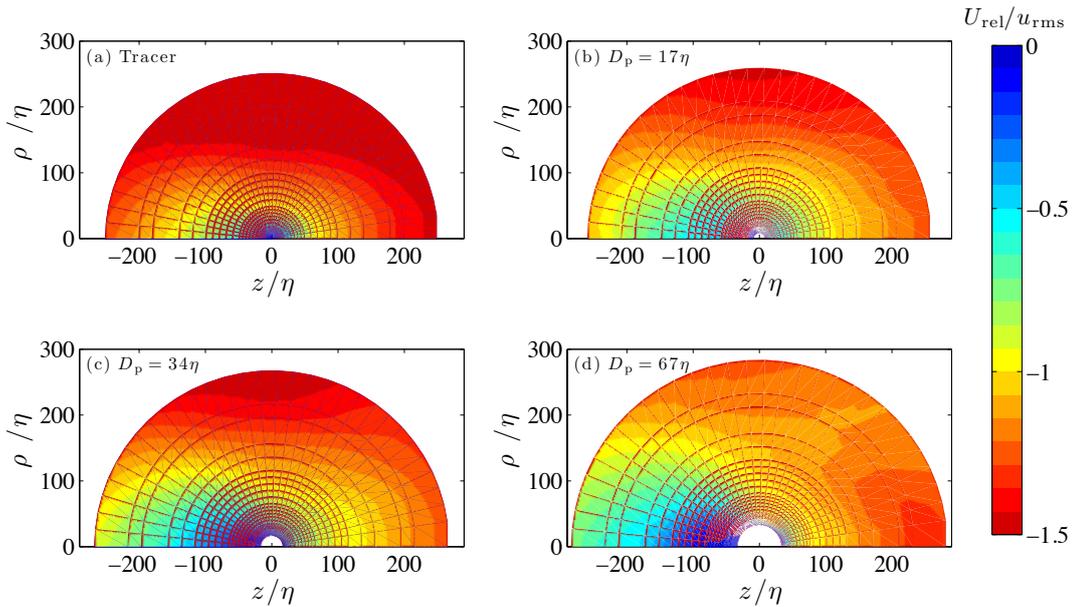


FIGURE 2.20 – Moyenne temporelle et sur les angles de la vitesse relative du fluide projetée sur la direction de glissement e_r pour (a) un traceur, (b) $D_p = 17\eta$, (c) $D_p = 34\eta$ et (d) $D_p = 67\eta$.

La figure 2.20 représente le profil de vitesse moyen mesuré pour un traceur et les trois tailles de particule. Le mouvement relatif du fluide par rapport à la particule va de $z > 0$ vers $z < 0$. Dans les quatre cas, les vitesses en amont et en aval sont nettement asymétriques. Aussi, lorsque le diamètre de la particule augmente, on observe le développement dans le sillage d'une région où l'écoulement est calmé. Toutefois, une grande partie de l'information contenue dans la vitesse relative U_{rel} est purement due à la cinématique. Ceci est clair lorsque l'on s'intéresse au traceur : l'écoulement autour de celui-ci n'est trivialement pas affecté par sa présence, toutefois le conditionnement en termes de direction du flux e_r empêche le profil moyen de s'annuler et met en exergue la croissance des incréments de vitesse turbulents $\sim r^{1/3}$. L'asymétrie que l'on observe s'explique par le fait qu'il est plus probable que les différences de vitesse longitudinales négatives ($z > 0$) soient plus grandes que celles positives ($z < 0$). Ceci peut être donc interprété comme une conséquence de la loi des 4/5 et de l'asymétrie de la distribution des incréments de vitesse turbulents qui en résulte.

En fait, les détails du glissement de la particule et des modifications de l'écoulement dues à sa présence peuvent être obtenus en comparant les profils de vitesse en présence ou non d'une particule. On observe sur la Fig. 2.20 que les différences les plus significatives ont lieu sur des échelles de l'ordre du diamètre de la particule. Ceci est encore plus clair sur la Fig. 2.21(a) qui représente pour $D_p = 34\eta$, la « vitesse de glissement » définie comme

$$U_{\text{slip}}(\rho, z) = U_{\text{rel}}(\rho, z) - U_{\text{rel}}^{\text{tracer}}(\rho, z). \quad (2.43)$$

Cette quantité est la différence entre deux différences de vitesse. Les quatre termes qu'elle contient peuvent en principe être regroupés en deux contributions : la différence entre la vitesse du fluide avec et sans la particule qui prend en compte les modifications de l'écoulement dues à sa présence, et l'opposé de la différence entre la vitesse de la particule et celle d'un traceur qui se situerait à la position de

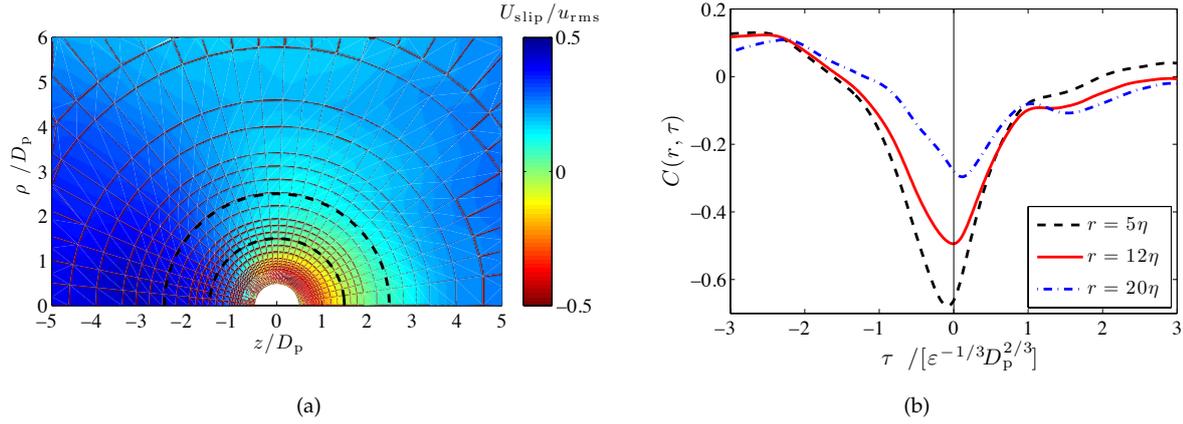


FIGURE 2.21 – (a) Vitesse de glissement U_{slip} pour $D_p = 34\eta$ définie par (2.43); les deux cercles noirs représentent respectivement une distance D_p et $2D_p$ de la surface de la particule. (b) Corrélation temporelle $C(r, \tau) = \langle \mathbf{F}(t + \tau) \cdot \mathbf{e}_r(t) \rangle / \langle |\mathbf{F}|^2 \rangle^{1/2}$ entre la force au temps $t + \tau$ et la direction du mouvement au temps t pour trois valeurs différentes de la distance r de la coquille et pour $D_p = 34\eta$.

la particule. Le premier terme contient toute la dépendance spatiale. On observe d'après la Fig. 2.21(a) que les modifications de l'écoulement dues à la particule ne sont visibles que jusqu'à des distances de l'ordre de son diamètre et s'annulent loin de celle-ci. Aux distances suffisamment grandes, U_{slip} atteint une valeur constante positive provenant de la seconde contribution. Cette limite, que l'on appelle U_{slip}^∞ , peut être utilisée pour définir une différence moyenne de vitesse entre la particule et le fluide à sa position, c'est-à-dire une vitesse de glissement. On peut alors utiliser U_{slip}^∞ de manière à définir un nombre de Reynolds de la particule $Re_p = U_{\text{slip}}^\infty D_p / \nu$ et on obtient : pour $D_p = 17\eta$, $U_{\text{slip}}^\infty \approx 0.049$ et $Re_p \approx 27$; pour $D_p = 34\eta$, $U_{\text{slip}}^\infty \approx 0.052$ et $Re_p \approx 58$; pour $D_p = 67\eta$, $U_{\text{slip}}^\infty \approx 0.057$ et $Re_p \approx 126$. L'incrément typique de la vitesse turbulente $\propto (\varepsilon D_p)^{1/3}$ à une séparation D_p et de 1.5 à 2 fois plus grand que ces valeurs de la vitesse de glissement. Notons que la définition de la vitesse de glissement que nous utilisons ici est basée sur la direction instantanée du mouvement \mathbf{e}_r que nous avons introduite ci-dessus. Elle est donc différente des définitions basées sur des arguments purement statistiques, comme par exemple celle utilisée dans [BV12].

Pour confirmer un peu plus la définition que nous avons choisie de la direction \mathbf{e}_r du mouvement relatif, on peut s'intéresser à son alignement avec la force \mathbf{F} exercée par le fluide sur la particule. Pour cela, on définit la corrélation $C(r, \tau) = \langle \mathbf{F}(t + \tau) \cdot \mathbf{e}_r(t) \rangle / \langle |\mathbf{F}|^2 \rangle^{1/2}$ entre la force au temps $t + \tau$ et la direction du mouvement sur une coquille à la distance r et au temps t . Comme on le voit sur la Fig. 2.21(b), les deux vecteurs sont anti-corrélés. Cette anti-corrélation est maximale lorsque l'on est très proche de la surface de la particule où l'écoulement est entièrement déterminé par le mouvement solide de la particule par la condition de non-glissement à sa surface. Toutefois, le laps de temps optimal τ qui maximise l'anti-corrélation y est négatif. Ceci signifie que c'est la force qui impose sa direction à celle \mathbf{e}_r du mouvement relatif. L'anti-corrélation décroît lorsque r augmente et devient très petite pour $r \gg D_p$. Aux distances suffisamment grandes, le minimum de la corrélation est atteint pour des valeurs positives de τ . Cela signifie que suffisamment loin de la particule, la direction de l'écoulement est en avance sur celle de la force. Il y a donc une valeur spécifique de r , de l'ordre de $D_p/2$, pour laquelle le laps minimisant la corrélation vaut zéro et la direction de la force et celle du mouvement relatif sont quasiment synchronisés. Ceci donne de nouveau de l'évidence que les interactions fluide-particule se passent sur des distances plus petites que le diamètre D_p , comme cela a déjà été observé dans [NP10]. Aussi, on trouve qu'une partie de la force exercée par le fluide correspond à une traînée dans la direction \mathbf{e}_r du mouvement relatif.

Modification de l'écoulement porteur et analogie avec les écoulements de paroi

Nous nous intéressons maintenant à l'influence de la particule sur les statistiques d'ordres plus élevés du champ de vitesse du fluide. La figure 2.22(a) montre la fonction de structure longitudinale « ancrée » sur la particule qui est définie comme $S_2^{\parallel}(r) = \langle [(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{V}_p(t)) \cdot \mathbf{n}]^2 \rangle$, où \mathbf{n} est le vecteur unitaire dans la direction $\mathbf{x} - \mathbf{X}_p$ et $r = \|\mathbf{x} - \mathbf{X}_p\| - D_p/2$ est la distance entre \mathbf{x} et la surface de la particule. En utilisant la définition de la direction instantanée $\mathbf{e}_r(t)$ du mouvement relatif introduite précédemment, la moyenne peut être décomposée en une contribution amont (pour \mathbf{x} dans un cône de

90° dans la direction de e_r), une contribution aval (dans un cône de 90° dans la direction de $-e_r$) et une contribution transverses (valeurs restantes). On observe sur la Fig. 2.22(a) que les fluctuations de vitesse sont apparemment amplifiées en amont de la particule. Ceci est dû pour l'essentiel aux modifications moyennes de l'écoulement, vu que celui-ci est accéléré lorsqu'il s'approche de la particule et qu'il rencontre des gradients assez forts. En principe, on s'attend à un comportement similaire en aval, vu que l'écoulement y est décéléré. Toutefois, on observe le phénomène inverse puisque l'asymptotique des grandes séparations r est atteinte par dessous. Ceci indique que la particule calme la turbulence.

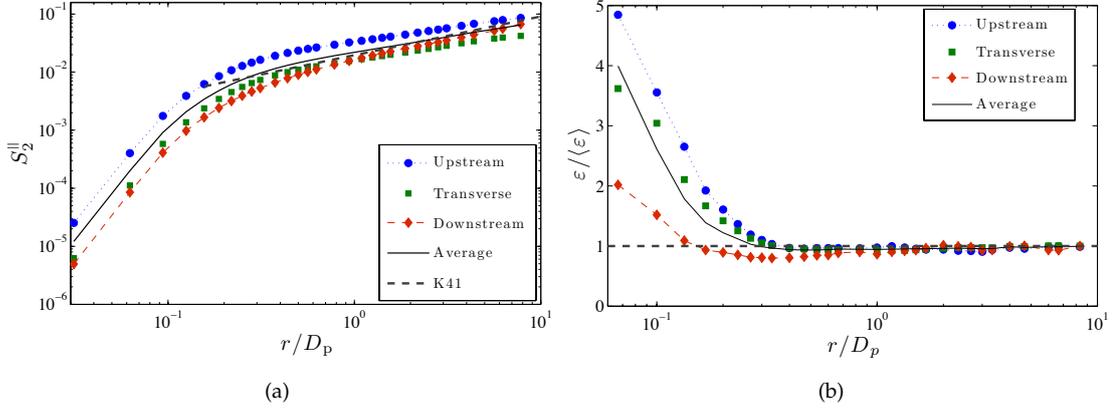


FIGURE 2.22 – (a) Fonction de structure longitudinale du second ordre ancrée sur la particule (la ligne K41 correspond à $S_2 = C_2(\epsilon r)^{2/3}$ avec $C_2 = 2.1$). (b) Taux de dissipation moyen de l'énergie cinétique dans les différentes régions autour de la particule de diamètre $D_p = 34\eta$.

Cet effet est encore plus visible dans le profil du taux moyen de dissipation de l'énergie cinétique calculé en fonction de la distance r à la surface de la particule et conditionné sur les secteurs amont, aval et transverse. Comme on le voit sur la Fig. 2.22(b), alors que la dissipation d'énergie est fortement amplifiée dans toutes les directions au voisinage immédiat de la particule, sa valeur en aval est moins de 90% de celle de sa moyenne jusqu'à des distances de l'ordre du diamètre de la particule. Ceci indique de nouveau que la turbulence est plus calme en aval de la particule. La particule crée donc une zone d'ombre dans son sillage. Une explication de ce phénomène repose sur le fait que toutes les structures ayant des tailles de l'ordre de D_p ou plus petites ne sont plus présentes dans l'écoulement aval. De plus, étant données les valeurs relativement faibles du nombre de Reynolds de la particule que nous avons estimées plus haut, le sillage de la particule n'est pas suffisamment violent pour injecter de façon significative de l'énergie cinétique dans l'écoulement. Cet effet d'ombre ne semble que faiblement dépendre de la taille de la particule, sous réserve de la petite gamme de diamètres que nous avons considérés et de la précision de notre méthode numérique.

Pour analyser de façon plus précise comment l'écoulement perturbé dépend de la taille de la particule, nous utilisons maintenant une approche similaire à celle utilisée en turbulence de paroi. Une première différence importante est dans le cas des particules, l'écoulement loin de la paroi n'est pas une donnée d'entrée du système. Notre approche repose donc sur ce qui se passe dans le voisinage immédiat de la particule. Une seconde différence est qu'à cause de l'isotropie de la dynamique des particules, le champ de vitesse est de moyenne nulle et il n'y a donc pas en général de notion de champ de vitesse moyen. Pour cette raison, nous utilisons la racine carrée de la valeur moyenne du carré des différences de vitesses tangentielles entre l'écoulement et la surface de la particule

$$U(r) = \left\langle (1/2) \| \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} - \mathbf{V}_p - (D_p/2) \boldsymbol{\Omega}_p \times \mathbf{n} \|^2 \right\rangle^{1/2}, \quad (2.44)$$

où \mathbf{n} est le vecteur unitaire normal à la surface et $\boldsymbol{\Omega}_p$ est la vitesse angulaire de la particule. Nos données numériques nous permettent de mesurer une *contrainte de cisaillement à la paroi* définie comme $\tau_w = \nu [dU/dr]_{r=0}$. Comme dans le cas des écoulements de paroi (voir, par exemple, [Pop00]), cette quantité, associée à la viscosité cinématique ν , permet de définir toutes les quantités pertinentes associées à la couche limite visqueuse autour de la particule, à savoir la *vitesse de friction* (ou intensité de la turbulence) $u_\tau = \sqrt{\tau_w}$, l'*échelle visqueuse* $\delta_\nu = \nu/u_\tau$ et le *nombre de Reynolds de friction* $Re_\tau = u_\tau D_p/\nu$. Aussi, U et r peuvent être écrits en unités de paroi sans-dimension en introduisant $U^+ = U/u_\tau$ et $r^+ = r/\delta_\nu$.

La vitesse du fluide à une distance r de la particule est entièrement déterminée par u_τ , δ_ν , D_p , L et

R_λ . L'analyse dimensionnelle suggère alors d'écrire

$$\frac{dU}{dr} = \frac{u_\tau}{r} \Psi(r/\delta_\nu, r/D_p, r/L, R_\lambda), \quad (2.45)$$

où nous avons adimensionné les échelles spatiales par r et les vitesses par u_τ . On utilise ensuite la séparation d'échelle $\delta_\nu \ll D_p \ll L$ pour mettre en évidence différentes sous-couches :

- $r \ll \delta_\nu$ correspond à la sous-couche visqueuse où par construction $U^+ \simeq r^+$.
- $\delta_\nu \ll r \ll D_p$ est la couche de défaut. On a $dU/dr \simeq (u_\tau/r) \Psi_*(R_\lambda)$, où $\Psi_*(R_\lambda) = \Psi(\infty, 0, 0, R_\lambda)$. Comme en turbulence de paroi, cela conduit à la Loi log $U^+ = C + \Psi_*(R_\lambda) \ln r^+$.
- $D_p \ll r \ll L$ correspond aux distances loin de la particule où on recouvre les statistiques turbulentes de la vitesse. Dans la limite des très grands nombres de Reynolds de l'écoulement porteur, on peut supposer que $r/L \rightarrow 0$. Aux grandes distances de la particule, le comportement de U devrait être donné par la fonction de structure du second ordre de l'écoulement. Selon les lois d'échelle Kolmogorov 1941, on s'attend à ce que $U^2 \simeq (4/3) C_2 (\varepsilon r)^{2/3}$. Ceci implique que pour $r/D_p \rightarrow \infty$, la fonction sans dimension Ψ doit diverger comme une loi de puissance (avec un exposant α et une constante Ψ_∞ qui dépend du nombre de Reynolds). Ainsi $dU/dr \simeq \Psi_\infty(R_\lambda) (u_\tau/r) (r/D_p)^\alpha$ quand $r \gg D_p$. On trouve donc $\alpha = 1/3$ et $u_\tau \propto (\varepsilon D_p)^{1/3}$.

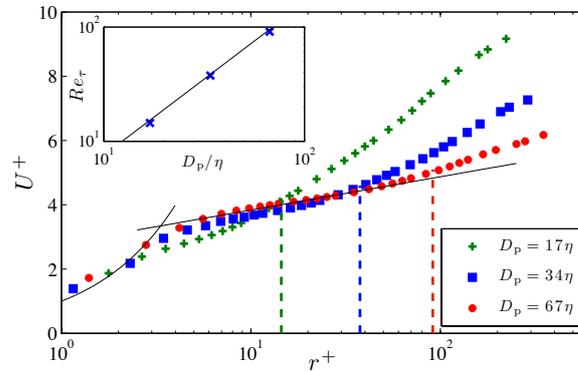


FIGURE 2.23 – Amplitude transverse moyenne U de la vitesse en fonction de la distance à la surface de la particule en unité de paroi pour les trois tailles différentes de particule. La courbe noire pleine sur la gauche représente la sous-couche visqueuse. La ligne noire est une approximation de la loi logarithmique $U^+ = 2.8 + 0.45 \ln r^+$. Les trois lignes pointillées verticales correspondent aux valeurs de D_p en unité de paroi. Encart : nombre de Reynolds de friction Re_τ en fonction du diamètre des particules (\times); la ligne noire correspond à $Re_\tau = 0.35 (D_p/\eta)^{4/3}$.

Ces trois asymptotiques peuvent être observées sur la Fig. 2.23 où l'amplitude U de la différence de vitesse tangentielle est représentée en fonction de la distance à la surface de la particule. On observe clairement une région de loi log qui devient plus large lorsque D_p augmente. La relation $u_\tau \propto (\varepsilon D_p)^{1/3}$ qui a été obtenue en raccordant l'asymptotique des grands r au comportement des fonctions de structure turbulentes implique que l'échelle visqueuse se comporte comme $\delta_\nu/\eta \propto (D_p/\eta)^{-1/3}$ et que le nombre de Reynolds de friction dépend de la taille de la particule comme $Re_\tau \propto (D_p/\eta)^{4/3}$. Ce dernier comportement est confirmé numériquement, comme on le voit dans l'encart de la Fig. 2.23. Notons que les valeurs que l'on obtient de cette façon diffèrent d'un facteur deux de celles obtenues précédemment en estimant la vitesse de glissement. Pour conclure cette analyse, soulignons que les arguments dimensionnels simples qui sont développés ici et semblent confirmés par nos simulations numériques montre que le paramètre important permettant de spécifier l'écoulement fluide au voisinage de la particule est le rapport sans dimension D_p/η .

Pour finir, quelques commentaires sur les implications potentielles de ces travaux. Une d'entre elles est en rapport avec la conception de modèles pour la dynamique de grosses particules suspendues dans des écoulements turbulents. Dans la plupart des situations pratiques que l'on rencontre en ingénierie ou dans les sciences de l'atmosphère, l'écoulement est sous-résolu (comme par exemple dans les simulations à grandes échelles LES) et la dynamique des particules avec des tailles aux échelles inertielles en dessous de la résolution est approchée par des particules ponctuelles [Bal09]. La force qui agit sur les particules est alors approchée par le modèle standard de Schiller–Naumann pour la traînée que nous avons décrit dans la section précédente, en incluant si possible des corrections empiriques pour prendre en compte les fluctuations turbulentes de l'écoulement au voisinage de la particule. L'approche que nous avons proposée ici ouvre de nouvelles pistes pour aborder ces questions en termes de direction de glissement, de moyennes dans des coquilles et de loi log autour de la particule. Ceci va au delà des objectifs de ces travaux. Il serait alors nécessaire d'investir un grand nombre d'heures de calcul pour étudier, par exemple, les corrélations entre la force et l'écoulement autour de la particule.

Chapitre 3

Caustiques et intermittence dans les différences de vitesse entre particules lourdes

Ce chapitre est dédié aux statistiques des différences de vitesse entre deux particules lourdes dans des écoulements turbulents. Comme cela est détaillé dans la section 3.1, les moments de cette différence de vitesse conditionnés sur leur séparation sont une quantité d'intérêt pour les applications. L'estimation des taux de collisions binaires nécessite en effet de connaître le flux de particules qui s'approchent l'une de l'autre à une distance égale à la somme de leur deux rayons. En collaboration avec M. Cencini, A. Celani et S. Musacchio, nous avons montré que les différences de vitesse entre particules très proches peuvent être arbitrairement grandes [BCCM05]. Ceci est lié à la présence de caustiques dans la distribution de particules : plusieurs particules avec des vitesses fortement différentes peuvent être présentes en un point unique de l'espace. Cet effet n'est pas présent pour les traceurs et il domine de plus en plus la dynamique lorsque l'inertie augmente. D'un point de vue statistique, ces caustiques ont pour signature un exposant de Hölder du champ de vitesse des particules différent de celui du fluide. Cet exposant tend vers un dans la limite d'inertie nulle et vers zéro aux très grands nombres de Stokes. Ces considérations donnent une bonne compréhension des mécanismes de collision.

La section 3.2 présente des travaux, essentiellement analytiques, que j'ai mené sur les suspensions de particules lourdes dans des écoulements modèles aléatoires. Mon étude s'est concentrée sur le mouvement relatif de deux particules dans un champ de vitesse donné par le modèle de Kraichnan, c'est-à-dire gaussien, homogène, isotrope, invariant d'échelle et avec un temps de corrélation très court. En collaboration avec M. Cencini et R. Hillerbrand, nous avons obtenu des résultats analytiques et numériques pour des particules avec des nombres de Stokes très grands, transportées par ce type d'écoulement lorsque ce dernier est différentiable [BCH07a] (voir aussi [BCHT08]). Ces résultats asymptotiques s'appliquent en fait à tous les écoulements dès lors que le temps de réponse des particules est bien plus grand que la plus grande échelle caractéristique du fluide.

Finalement, la section 3.3 étend ces résultats au cas de suspensions de particules lourdes dans des écoulements tridimensionnels en turbulence homogène isotrope développée [BBL⁺10]. Nous utilisons des résultats de simulations numériques directes pour montrer que lorsque les particules sont séparées par des distances aux échelles dissipatives, les différences de vitesse sont gouvernées par la compétition entre des régions calmes et lisses et les caustiques. Ceci conduit à un comportement quasi bifractal des moments des différences de vitesse entre particules où les moments d'ordres élevés sont dominés par les caustiques. En ce qui concerne les particules dont les distances sont aux échelles inertielles de la turbulence, les statistiques des différences de vitesse peuvent être décrites en termes d'un exposant de Hölder local qui ne dépend que du nombre de Stokes associé à la séparation entre les particules.

3.1 Effet des caustiques sur les taux de collisions entre particules

Dans de nombreuses applications naturelles et industrielles, il est important de comprendre les taux auxquels des petites particules inertielles transportées par un écoulement turbulent entre en collision. Ceci a par exemple un intérêt lorsque l'on cherche à prédire l'évolution de la distribution de taille dans une suspension turbulente pour comprendre les échelles de temps de déposition par sédimentation

ou de réaction entre les impuretés. Des efforts importants, aussi bien théoriques [ST56, Abr75, WC83, KK97, ZSA03, FFS02, MUW07] que numériques [SC97, RC00, WWY00, ARWG08, RPGW13], ont été dédiés à essayer de quantifier l'accroissement des taux de collision induit par l'inertie des particules transportées. Deux mécanismes ont été identifiés : la concentration préférentielle qui augmente la probabilité que deux particules se trouvent à une distance de collision [RC00, FFS02] et le détachement des trajectoires des particules de celles des traceurs du fluide qui accroît la différence relative entre deux particules s'approchant l'une de l'autre [Abr75, KK97, FFS02, WM05]. La plupart des travaux sur ce sujet considère ces deux mécanismes de façon indépendante. Une telle approche est justifiée dans les asymptotiques de très faible ou très forte inertie. Dans le premier cas, les particules se comportent quasiment comme des traceurs et leur différence de vitesse est donnée par le cisaillement de la vitesse du fluide. L'effet de concentration préférentielle est alors dominant et ce sont essentiellement les fluctuations de la distribution de particules qui expliquent une augmentation des taux de collisions due à l'inertie des particules. Dans l'autre asymptotique, tout se passe comme si le mouvement des particules était purement balistique. Elles se distribuent de façon uniforme en espace mais ont la possibilité de rejoindre la même position avec des vitesses très différentes ; ce mécanisme est connu sous le nom « d'effet fronde » [FFS02]. Différents travaux ont eu pour but de refermer le fossé qui existe entre ces deux asymptotiques. Par exemple, il a été proposé dans [KK97] d'utiliser une formule d'interpolation pour la différence de vitesse typique qui consiste à sommer entre eux l'effet du cisaillement du fluide et celui de l'accélération due à l'inertie. Ce modèle se réduit au résultat de Saffman et Turner [ST56] dans la limite des traceurs et d'Abrahamson [Abr75] pour les particules avec une grande inertie. Toutefois, il ne prend pas en compte les effets de concentration préférentielle. Des améliorations ont été proposées dans [ZSA03] en utilisant deux modèles analytiques pour les vitesses du fluide et des particules, mais en négligeant toujours l'accumulation des particules.

Cette section résume les travaux de [BCCM05] dans lesquels nous proposons une nouvelle approche traitant ces deux mécanismes de façon cohérente. Notre but n'était pas de fournir un modèle analytique complet des taux de collision mais plutôt un cadre phénoménologique consistant dans lequel les quantités pertinentes à leur estimation sont mises en exergue. L'idée de base est de prendre en compte la dynamique des particules dans l'espace des phases complet positions-vitesses. Les taux de collisions sont alors caractérisés en termes d'un « taux d'approche » entre particules dont nous caractérisons la dépendance spatiale.

3.1.1 Collisions fantômes et taux d'approche

Nous nous limitons au cas de particules très petites et bien plus lourdes que le fluide dont les trajectoires sont données par l'équation de Newton

$$\ddot{\mathbf{X}} = -\frac{1}{\tau} \left[\dot{\mathbf{X}} - \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) \right], \quad (3.1)$$

où le temps de réponse est donné par $\tau = 2\rho_p a^2 / (9\rho_f \nu)$ où a est le rayon de la particule. Cela signifie que la dynamique des particules est entièrement caractérisée par le nombre de Stokes $St = \tau / \tau_\eta$ défini comme le rapport entre le temps de réponse des particules et la plus petite échelle caractéristique de l'écoulement porteur. Nous considérons une collection de particules avec différents nombres de Stokes dans un domaine fini de taille L . Même si les particules sont transportées par le même écoulement, elles convergent vers différents attracteurs associés à leur nombre de Stokes. Une caractérisation adéquate de la suspension est donnée par la densité instantanée $f_{St}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ dans l'espace des phases, qui peut être interprétée comme la densité de probabilité de trouver une particule de nombre de Stokes St à la position \mathbf{x} avec une vitesse \mathbf{v} à l'instant t pour une réalisation fixée de l'écoulement.

Les suspensions impliquent généralement des interactions locales entre les particules : la poussière se disperse à travers des collisions élastiques ou inélastiques selon leur vitesse d'impact [WBC01] ou les gouttelettes d'eau coalescent pour former des gouttes de pluie [FFS02]. Dans les suspensions diluées, on s'attend à ce que les interactions dominantes soient des collisions binaires qui ont lieu lorsque deux particules de rayons a_1 et a_2 (c'est-à-dire avec des nombres de Stokes St_1 et St_2), sont à une distance $r \approx a_1 + a_2$. Pour les suspensions très diluées, il a été proposé dans [WWZ98] d'estimer les taux de collision en utilisant l'approche dites de *collisions fantômes*. L'idée principale est de laisser les particules se chevaucher après qu'elles se rapprochent d'une distance inférieure à la somme de leurs rayons. Ni les tailles des particules, ni leurs vitesses ne sont modifiées après un tel événement : la microphysique des collisions n'est pas implémentée mais celles-ci sont simplement enregistrées pour estimer le taux auquel elles se produisent. Comme cela a été montré dans [VPL11], cette approche surestime les taux de collisions entre particules, notamment aux petits nombres de Stokes. Dans ce cas, les particules ont des

différences de vitesse faibles et passent des temps longs à des distances de l'ordre de la somme de leurs rayons pendant lesquels elles peuvent subir un grand nombre de pseudo-collisions. Toutefois, on s'attend à ce que l'approche de collisions fantômes soit pertinente dans la limite de forte dilution, soit pour les grands nombres de Stokes, soit pour prédire les collisions entre particules de tailles très différentes. Aussi, cette approche permet d'obtenir des estimations des taux de collision purement dynamiques et qui ne dépendent pas du type d'interaction considéré.

Pour évaluer les taux de collisions fantômes, on introduit le taux auquel les paires de particules séparées par une distance r s'approchent. Ce taux peut s'écrire en termes de la densité de l'espace des phases comme

$$\kappa_{1,2}(r, t) = \left\langle \int_{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2| = r} d\Omega_1 d\Omega_2 f_{St_1}(\Omega_1, t) f_{St_2}(\Omega_2, t) w_{1,2}^- \right\rangle, \quad (3.2)$$

où $\Omega = (\mathbf{x}, \mathbf{v})$, l'intégrale dans l'espace des phases est effectuée sur toutes les vitesses et sur les positions satisfaisant $|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2| = |\mathbf{r}| = r$ et $w_{1,2}^-$ désigne la partie négative de la différence de vitesse longitudinale $(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) \cdot \hat{\mathbf{r}}$. La moyenne $\langle \cdot \rangle$ porte sur les réalisations du champ de vitesse du fluide. On peut aisément voir que pour $r = a_1 + a_2$, le taux d'approche $\kappa_{1,2}$ donne la fraction de particules de tailles a_1 et a_2 qui entre en collision par unité de temps dans le domaine. Toutefois, comme nous allons le voir par la suite, l'ensemble de la dépendance spatiale de $\kappa_{1,2}$ donne des informations importantes sur la dynamique. Il est intéressant de remarquer que le taux d'approche (3.2) peut s'exprimer de la manière suivante

$$\kappa_{1,2}(r, t) = \frac{1}{L^d} \langle w_{1,2}^- | |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2| = r \rangle p_{1,2}(r, t), \quad (3.3)$$

où $p_{1,2}(r, t)$ désigne la densité de probabilité de la distance entre deux particules de nombres de Stokes St_1 et St_2 . Cette formulation fait apparaître la valeur moyenne de la vitesse négative entre les particules conditionnée sur leur séparation. Il s'agit d'une sorte de fonction de structure de la vitesse des particules. Dans le cas de particules de même nombre de Stokes ($St_1 = St_2 = St$) et lorsque leur dynamique est dans un état statistiquement stationnaire, on peut aisément vérifier que $\langle w^- | |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2| = r \rangle = (1/2)S_1(r; St)$ où $S_p(r; St) = \langle |w|^p | |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2| = r \rangle$ est la fonction de structure longitudinale d'ordre p des particules.

Le rôle de l'inertie dans l'augmentation du taux (3.2) par rapport au cas des traceurs peut être compris pour des particules de même nombre de Stokes $St_1 = St_2 = St$. Tout d'abord, les concentrations induites par l'inertie accroissent la probabilité que deux particules soit proches l'une de l'autre. Deuxièmement, le taux d'approche peut être augmenté par de grandes différences de vitesse longitudinales entre les particules. En conséquence, on s'attend à ce que $\kappa_{1,2}$ dépende de façon non triviale de la séparation r . On sait que cet effet est important aux grands nombres de Stokes où des caustiques apparaissent dans la distribution des particules dans l'espace des phases [WM05]. De telles singularités correspondent à des positions spatiales où l'attracteur ce replie, ce qui conduit à la présence de grandes différences de vitesse entre les particules. Un tel repliement en vitesse est le mécanisme de base conduisant à ce que l'on appelle l'effet fronde [FP07].

Il est clairement difficile d'effectuer une intégration numérique directe de la densité de l'espace des phases en dimension $(2 \times d)$. On choisit donc une stratégie différente se basant sur l'approche lagrangienne. En effet, comme nous l'avons vu dans la section 1.1.1, étudier les statistiques à deux points de la densité de particules, comme cela est nécessaire pour les collisions binaires, est équivalent à regarder le mouvement relatif entre les particules. De plus, lorsque la dynamique est ergodique, les moyennes spatiales pondérées par la densité des particules peuvent être remplacées par des moyennes temporelles le long des trajectoires. Pour évaluer le taux d'approche $\kappa_{1,2}$, il est donc suffisant de suivre deux particules avec des nombres de Stokes St_1 et St_2 et de calculer la moyenne temporelle de la composante radiale négative de leur différence de vitesse lorsque celles-ci sont à une distance r . Numériquement, il est plus simple de détecter lorsque les particules sont à une distance inférieure à r plutôt que exactement égale à r et donc de travailler avec des quantités cumulatives qui ont d'autre part l'avantage d'être bien moins bruitées. Au introduit ainsi

$$\mathcal{K}_{1,2}(r) = \overline{|W_{1,2}| \theta(-W_{1,2}) \theta(r - |\mathbf{R}_{1,2}|)}, \quad (3.4)$$

où $\mathbf{R}_{1,2} = \mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2$, $W_{1,2} = (\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2) \cdot \mathbf{R}_{1,2} / |\mathbf{R}_{1,2}|$, θ est la fonction de Heaviside et les barres horizontales dénotent les moyennes temporelles lagrangiennes. Le taux (3.2) est alors obtenu par $\kappa_{1,2}(r) = \partial_r \mathcal{K}_{1,2}(r)$.

Pour quantifier les contributions respectives des deux effets de l'inertie qui accroissent les collisions entre particules, à savoir la concentration préférentielle et les grandes différences de vitesse, on considère aussi

$$P_{1,2}(r) = \overline{\theta(r - |\mathbf{R}_{1,2}|)}, \quad (3.5)$$

qui est la probabilité que deux particules soient à une distance inférieure à r . Il est clair que $p_{1,2}(r) = \partial_r P_{1,2}(r)$. Pour des séparations r bien plus petites que la plus petite échelle caractéristique de l'écoulement (que l'on note η et qui en turbulence correspond à l'échelle dissipative de Kolmogorov), on s'attend à ce que $p_{1,2}$ et $\kappa_{1,2}$ aient un comportement en loi de puissance

$$p_{1,2}(r) \sim \left(\frac{r}{\eta}\right)^{\mathcal{D}(St_1, St_2)-1}, \quad (3.6)$$

$$\kappa_{1,2}(r) \sim \left(\frac{r}{\eta}\right)^{\gamma(St_1, St_2)}. \quad (3.7)$$

Pour des particules de même nombre de Stokes ($St_1 = St_2 = St$), $\mathcal{D}(St, St)$ est exactement la dimension de corrélation $\bar{\mathcal{D}}_2$ de la projection de l'attracteur sur l'espace physique. Pour des paires générique, cet exposant mesure la corrélation entre les distributions de particules des deux types. L'exposant γ peut se récrire comme $\gamma = \mathcal{D}(St_1, St_2) - \xi_1(St_1, St_2)$ où ξ_1 est une sorte d'exposant de Hölder du champ de vitesse des particules. Lorsque l'écoulement porteur est lisse, on s'attend à ce que $0 \leq \xi_1(St_1, St_2) \leq 1$, la borne inférieure étant atteinte lorsque les vitesses des particules sont décorréélées et celle supérieure lorsqu'elles sont transportées par le même écoulement différentiable.

Pour comprendre comment ces exposants dépendent du nombre de Stokes, commençons par regarder le cas d'une suspension monodispersée. Dans la limite des petits nombres de Stokes, un développement perturbatif de (3.1) permet d'écrire la dynamique des particules comme celle de traceurs dans un écoulement synthétique compressible [Max87]. Cet écoulement est différentiable et donc la différence de vitesse entre les particules est proportionnelle à r . On a ainsi $\gamma \approx \bar{\mathcal{D}}_2$. Lorsque $St = 0$, les particules se répartissent de façon uniforme, $\bar{\mathcal{D}}_2 = d$ et donc $\gamma = d$. Pour des valeurs petites mais finies de St , on a vu précédemment que la dimension de corrélation se comporte comme $\bar{\mathcal{D}}_2 = d - \alpha St^2$ (α étant une constante positive dépendant de l'écoulement porteur). L'effet principal de l'inertie sur les collisions provient donc dans cette asymptotique de la concentration des particules. L'autre asymptotique peut aussi facilement se comprendre : pour $St \gg 1$, les particules sont distribuées uniformément dans le domaine avec des vitesses décorréélées les unes des autres. On a ainsi $\bar{\mathcal{D}}_2 \approx d$ et $\gamma \approx d - 1$.

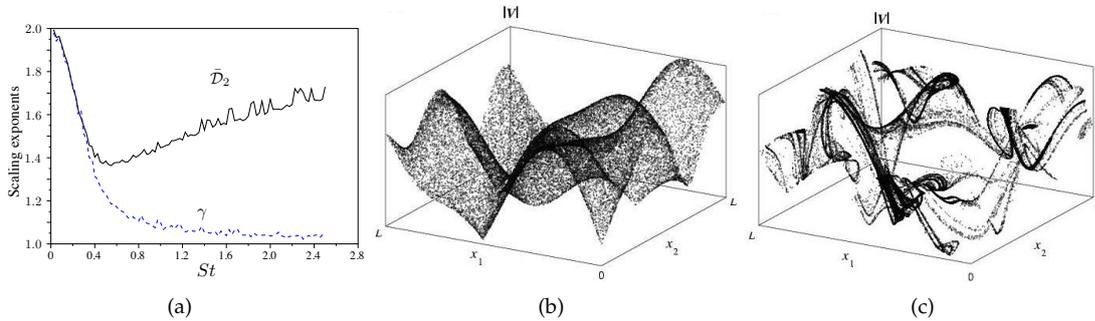


FIGURE 3.1 – (a) Exposants $\bar{\mathcal{D}}_2$ et γ dans un écoulement bidimensionnel aléatoire gaussien. (b) Module de la vitesse des particules dans le même écoulement en fonction des positions pour $St = 10^{-3}$. (c) Idem pour $St = 1$.

Pour illustrer ces propos, nous considérons un écoulement porteur bidimensionnel aléatoire gaussien composé de la superposition de modes indépendants avec des temps de corrélation finis (voir [BCCM05] pour plus de détails). Les exposants $\bar{\mathcal{D}}_2$ et γ ont été évalués numériquement et les résultats sont montrés sur la Fig. 3.1(a) en fonction du nombre de Stokes St . On y voit clairement les comportements attendus dans les deux asymptotiques. Pour $St \ll 1$, les exposants $\bar{\mathcal{D}}_2$ et γ coïncident; pour $St \gg 1$, on observe que $\gamma \rightarrow 1$. Une dépendance non triviale apparaît aux nombres de Stokes intermédiaires. Pour les nombres de Stokes où $\bar{\mathcal{D}}_2$ est proche de son minimum (maximum de concentration), on observe que γ commence à dévier de façon notable. Ceci vient du fait que pour de telles valeurs de St , l'attracteur des particules dans l'espace des phases commence à se replier dans les directions de v et sa tendance à se contracter vers la surface définie par l'écoulement du fluide devient de plus en plus faible. Le taux de cette contraction est donné par l'inverse du nombre de Stokes. Pour $St = 0$ elle est extrêmement rapide, ce qui empêche l'apparition de repliements donnant une distribution de vitesse des particules quasiment monocinétique (voir Fig. 3.1(b)). Lorsque le nombre de Stokes croît, des caustiques se forment et la probabilité de trouver des particules à la même position avec des vitesses différentes augmente (voir Fig. 3.1(c)). De tels points, une fois projetés sur l'espace des positions, conduisent à des intersections de l'attracteur avec lui-même.

Pour résumer, on observe que pour des particules de même nombre de Stokes, le taux d'approche peut être décrit pour les petites séparations r par le comportement en loi de puissance

$$\kappa_{St}(r) \simeq \frac{C_{St} V_{St}}{L} \left(\frac{r}{L} \right)^{\gamma(St)}. \quad (3.8)$$

La constante C_{St} dépend de St et des statistiques des gradients de l'écoulement porteur. V_{St} est une vitesse typique des particules avec un nombre de Stokes St . Pour $St \ll 1$ elle est de l'ordre de la valeur typique de la vitesse du fluide (u_{rms} en turbulence). Pour $St \gg 1$, il a été montré que $V_{St} \sim u_{\text{rms}}/St^{1/2}$ (voir par exemple [ZA03]).

On passe maintenant au cas de particules avec différents nombres de Stokes. Comme nous l'avons vu dans la section 1.1.3, il existe une longueur caractéristique $r_* = \eta |\theta|$ avec $\theta = (St_1 - St_2)/St$ et $St = (St_1 + St_2)/2$ qui permet de différencier deux régimes. Aux échelles plus grandes que r_* , la séparation et la différence de vitesse entre les particules ne sont pas discernables de ceux entre deux particules avec le même nombre de Stokes égal à St . Aux échelles plus petites que r_* , les dynamiques des particules ne sont plus corrélées. Deux cas doivent alors être distingués : les petites différences en nombre de Stokes telles que $r_* \ll L$ pour lesquelles une gamme d'échelle intermédiaires est présente et les différences finies en nombre de Stokes pour lesquelles $r_* \gtrsim \eta$, et cette gamme intermédiaire est absente.

a. Petites différences en nombre de Stokes ($\theta \ll 1$)

Aux échelles intermédiaires $r_* \ll r \ll \eta$, les effets de la polydispersion sont négligeables et les quantités d'intérêt sont décrites par la dynamique relative de particules avec le même nombre de Stokes, St , correspondant à la valeur moyenne de St_1 et St_2 . On a ainsi $\kappa_{1,2}(r) \approx \kappa_{St}(r)$ donné par (3.8). Pour $r \ll r_* \ll L$, la différence de vitesse entre les particules devient indépendante de leur séparation. À ces échelles, les particules associées à différentes valeurs de St se voient les unes les autres comme un gaz de particules libres uniformément distribuées en espace. On a donc

$$\kappa_{1,2}(r) \simeq \frac{C_{St} V_{St} |\theta|^{\gamma(St)-d+1}}{L} \left(\frac{r}{L} \right)^{d-1}. \quad (3.9)$$

Cette expression se raccorde au régime intermédiaire pour $r = r_*$. Les constantes C_{St} et V_{St} sont données par les statistiques associées aux particules de même nombre de Stokes $St = (St_1 + St_2)/2$.

b. Grandes différences en nombre de Stokes ($\theta = \mathcal{O}(1)$)

Dans ce cas r_* est de l'ordre ou plus grand que η et le régime asymptotique intermédiaire disparaît. Ainsi, quelle que soit l'échelle $r \ll L$, les particules voient les autres comme uniformément réparties avec des vitesses indépendantes. Les différences de vitesses peuvent être approchées par celles entre deux vitesses décorrélées. Ceci conduit à l'estimation $(V_{St_1}^2 + V_{St_2}^2)^{1/2}$, où V_{St_j} est la vitesse caractéristique des particules avec un nombre de Stokes St_j . Il en suit

$$\kappa_{1,2}(r) \sim \frac{C_{St_1, St_2}}{L} (V_{St_1}^2 + V_{St_2}^2)^{1/2} \left(\frac{r}{L} \right)^{d-1}. \quad (3.10)$$

3.1.2 Modélisation phénoménologique du noyau de collision

Pour simplifier la discussion, nous nous limitons ici aux suspensions polydispersées de particules ayant toutes la même densité de masse. Cette hypothèse implique une relation simple entre le nombre de Stokes et la taille des particules, à savoir $St \propto a^2$. Dans ce cadre, la description phénoménologique la plus simple des collisions entre particules dans une suspension diluée se concentre sur le nombre moyen de collisions par unité de temps entre des particules de tailles a_1 et a_2 :

$$\mathcal{N}_c(a_1, a_2) = Q(a_1, a_2) \mathcal{N}_1 \mathcal{N}_2, \quad (3.11)$$

où \mathcal{N}_i est le nombre moyen de particules de taille a_i dans le domaine. Le noyau de collision efficace $Q(a_1, a_2)$ est donné par le taux moyen auquel des particules associées aux nombres de Stokes $St_1 \propto a_1^2$ et $St_2 \propto a_2^2$ arrivent à une distance égale à la somme de leurs rayons, c'est-à-dire $Q(a_1, a_2) = \kappa_{1,2}(a_1 + a_2)$. Construire des modèles quantitatifs pour les noyaux de collision est important dans de nombreuses applications. La connaissance de Q est par exemple indispensable pour comprendre l'évolution de la distribution de taille des gouttelettes dans les nuages et la formation de la pluie. Nous pensons que les

ingrédients principaux qui sont nécessaires à la construction du noyau sont, au moins d'un point de vue qualitatif, indépendants de la complexité de l'écoulement. Ceci fait que nous nous concentrons toujours sur le cas d'un écoulement aléatoire bidimensionnel en ignorant pour le moment certains aspects peut-être importants des écoulements turbulents. Le but est de développer un modèle phénoménologique semi-quantitatif pour $Q(a_1, a_2)$ qui serait capable de reproduire les mécanismes principaux de collisions entre particules en suspension.

Il y a deux asymptotiques dans lesquelles les propriétés de Q sont bien comprises, à savoir pour une inertie nulle ($St \rightarrow 0$) et pour des temps de réponse infinis ($St \rightarrow \infty$). Dans les deux limites les particules se répartissent de façon uniforme en espace, de telle sorte que l'étude des taux de collision se réduit à comprendre les statistiques des différences de vitesse. En suivant l'approche de Saffman et Turner [ST56], le noyau de collision peut s'écrire dans la limite $St \rightarrow 0$ et dans un écoulement différentiable comme

$$Q_{ST}(a_1, a_2) = D \lambda ((a_1 + a_2)/L)^d. \quad (3.12)$$

Cette expression est obtenue en multipliant la section efficace géométrique $\propto (a_1 + a_2)^{d-1}$ par les différences de vitesse typiques entre les deux particules. Ces dernières peuvent être approchées par $\lambda(a_1 + a_2)$, où λ est le gradient typique du fluide; dans les écoulement turbulents, il est généralement estimé comme $\lambda \approx (\varepsilon/\nu)^{1/2} = 1/\tau_\eta$. Pour $St \rightarrow \infty$, il a été suggéré par Abrahamson [Abr75] que le noyau peut être obtenu par des arguments de chaos moléculaire, vu que les positions et les vitesses ne sont pas corrélées. Ceci conduit à

$$Q_A(a_1, a_2) = \frac{D'}{L^d} (V_{St_1}^2 + V_{St_2}^2)^{1/2} (a_1 + a_2)^{d-1}, \quad \text{où } V_{St} \sim u_{rms}/St^{1/2}. \quad (3.13)$$

De nombreux travaux se sont consacrés à comprendre ce qui se passe dans le régime intermédiaire. Par exemple, pour $St \ll 1$ mais fini, les taux de collisions sont augmentés par l'effet de concentration préférentielle. Ceci joue un rôle crucial dans les situations quasi monodispersées, mais ces questions ne sont peut-être pas pertinentes pour le cas de particules de tailles différentes. Aussi nous avons vu que même dans le cas de particules avec le même nombre de Stokes, les effets de concentration cessent d'être dominants lorsque le nombre de Stokes dépasse sa valeur qui correspond à un minimum de la dimension de corrélation. Les différences de vitesse ne sont alors plus proportionnelles à la distance entre les particules. L'effet de ce mécanisme sur les particules de tailles différentes est toujours mal compris. En effet dès que la différence de nombre de Stokes n'est plus négligeable, l'effet de l'inertie doit être traduit en termes de corrélation entre les positions et les vitesses de particules appartenant à différentes populations. Nous exploitons ici les résultats obtenus dans la section précédente pour proposer un modèle phénoménologique pour le noyau de collision qui se réduit aux formes ci-dessus dans les asymptotiques de très faible et très forte inerties. Dans le régime intermédiaire, une interpolation entre ces deux asymptotiques apparaît de façon naturelle en termes de taux d'approche et de l'exposant $\gamma(St)$ qui (comme cela est montré sur la Fig. 3.1(a)) ne peut pas être relié trivialement à la dimension de corrélation en dehors des deux régimes asymptotiques. Aussi, l'identification de l'échelle de coupure r_* de la sous-section précédente (voir aussi 1.1.3) donne une façon simple de distinguer entre les mécanismes d'accélération et d'étirement différentiels qui animent le mouvement relatif de particules avec des nombres de Stokes différents. Pour transformer notre approche en modèle opérationnel et soutirer des prédictions quantitatives, il serait nécessaire d'obtenir la dépendance analytique de l'exposant $\gamma(St)$ en fonction du nombre de Stokes. Même dans le cas d'écoulements porteurs aléatoires simples, ceci est encore loin de nos capacités actuelles. Toutefois, cette quantité peut être étudiée grâce à des simulations numériques directes (cf. section 3.3) ou mesurée dans des expériences en utilisant des techniques de suivi lagrangien des particules.

En suivant les différents cas identifiés dans la sous-section précédente, le plan (a_1, a_2) peut être divisé en différentes régions selon le comportement de $\kappa_{1,2}(r)$ évalué pour $r = a_1 + a_2$. Trois régions peuvent être identifiées (voir l'illustration de la Fig. 3.2(a)) : la région **A** où $r_* \leq a_1 + a_2 \leq \eta$, **B** qui est définie par $a_1 + a_2 \leq r_* \leq \eta$, et **C** par $a_1 + a_2 \leq \eta \leq r_*$. En se rappelant que $r_* \propto |a_1^2 - a_2^2|/(a_1^2 + a_2^2)$, et en implémentant les résultats de la sous-section précédente, on obtient les comportements suivants pour le noyau de collision :

A- Dans la région grise de la Fig. 3.2(a) définie par

$$|a_1 - a_2| \leq 2\eta - (4\eta^2 - (a_1 + a_2)^2)^{1/2}, \quad (3.14)$$

le comportement de la différence de vitesse radiale est bien décrit par le mouvement à deux points de particules avec le nombre de Stokes $St \propto (a_1^2 + a_2^2)$. Le taux de collision se réduit donc à celui entre des

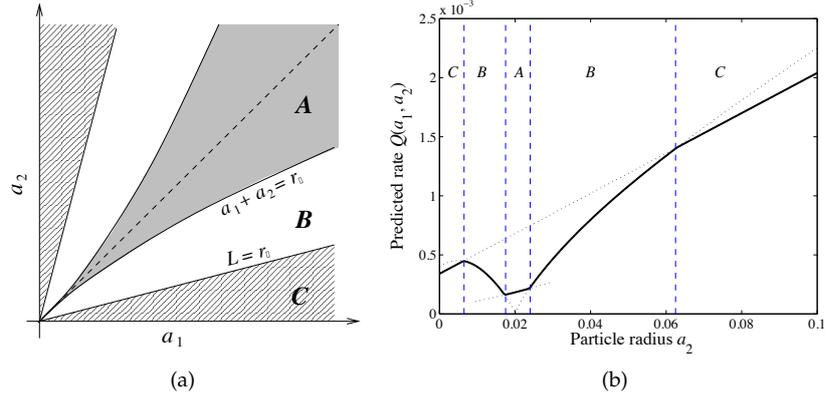


FIGURE 3.2 – (a) Schéma des différentes régions du plan (a_1, a_2) correspondant aux différentes contributions du taux d'approche $\kappa_{1,2}$ au noyau de collision. (b) Forme fonctionnelle typique du taux de collision (ligne grasse), représentée ici en fonction de a_2 pour une valeur de a_1 fixée. Le noyau de collision prend les différentes formes (3.15), (3.17) ou (3.18) (représentées comme des lignes pointillées), selon que (a_1, a_2) soient dans les régions **A**, **B** ou **C**.

particules associées au même nombre de Stokes, à savoir celui donné par (3.8). On a alors

$$Q(a_1, a_2) \sim C_{St} V_{St} \frac{(a_1 + a_2)^{\gamma(St)}}{\eta^{\gamma(St)+1}}, \quad (3.15)$$

où les constantes C_{St} et V_{St} dépendent du nombre de Stokes et des statistiques de la vitesse du fluide.

B- Dans la région blanche, l'inégalité (3.14) est satisfaite et on a aussi

$$|a_1 - a_2| \leq (2 - \sqrt{3}) (a_1 + a_2). \quad (3.16)$$

Le mouvement des deux particules devient décorrélé et d'après (3.9) on obtient :

$$Q(a_1, a_2) \sim C_{St} V_{St} \frac{|a_1 - a_2|^{\gamma(St)-d+1} (a_1 + a_2)^{\gamma(St)}}{(a_1^2 + a_2^2)^{\gamma(St)+1}}. \quad (3.17)$$

C- Dans la région hachurée où l'inégalité (3.16) n'est plus satisfaite, le taux de collision est donné par

$$Q(a_1, a_2) \sim C'_{St_1, St_2} (V_{St_1}^2 + V_{St_2}^2)^{1/2} \frac{(a_1 + a_2)^{d-1}}{\eta^d}, \quad (3.18)$$

où V_{St_1} et V_{St_2} sont les vitesses typiques associées respectivement aux particules de taille a_1 et a_2 . Bien évidemment, lorsque l'on est proche des bords de la région hachurée, la constante C'_{St_1, St_2} doit être bien choisie pour s'assurer de la continuité du noyau Q dans le plan (a_1, a_2) . Notons que cette expression est cohérente avec la prédiction d'Abrahamson (3.13) dont la validité est attendue aux grands nombres de Stokes.

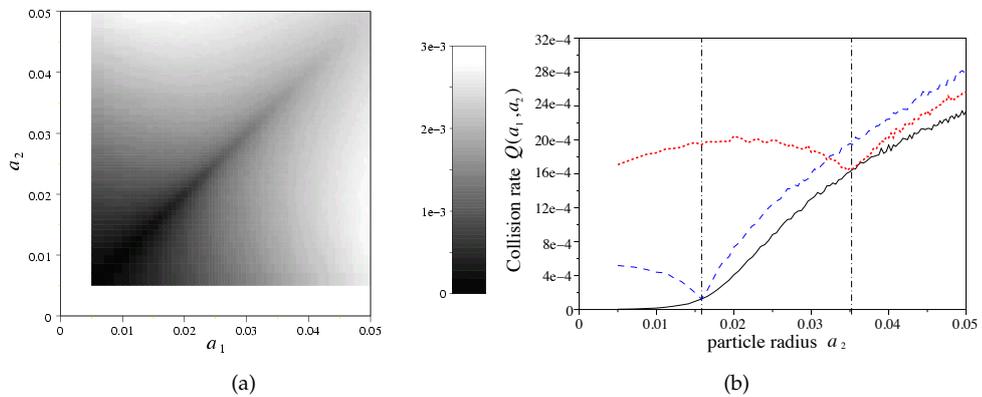


FIGURE 3.3 – (a) Taux de collision effectif $Q(a_1, a_2)$ obtenu numériquement pour des particules fantômes dans un écoulement bidimensionnel aléatoire gaussien. (b) Idem mais cette fois-ci représenté pour $a_1 = a_2$ (ligne continue noire) et en fonction de a_2 pour deux valeurs fixées de a_1 (lignes bleue et rouge).

Quelques commentaires sur les formes que prend le noyau selon les valeurs des rayons des particules. La première information triviale est que (3.15) comprend les deux asymptotiques des nombres de Stokes très petits (3.12) et très grands (3.13) lorsque γ est remplacé par ses valeurs limites. Une observation importante est que les collisions entre particules avec des nombres de Stokes différents sont reliées à une loi d'échelle non-triviale seulement lorsque leurs rayons sont similaires (dans la zone grise de la Fig. 3.2(a)). Dans cette région, les taux peuvent être obtenus en termes de la dynamique de particules avec un nombre de Stokes moyen. L'information essentielle est contenue dans la dépendance de l'exposant γ en fonction du nombre de Stokes. La forme typique du noyau obtenue d'après les prédictions (3.15), (3.17) et (3.18) est représentée sur la Fig. 3.2(b). Le taux de collision minimal est obtenu pour des particules de même taille ; ceci est en accord avec la propriété de symétrie du noyau que l'on obtient en interchangeant a_1 et a_2 . La croissance du noyau pour $a_2 \gg a_1$ est essentiellement due à une augmentation de la section efficace dans cette asymptotique. Notons aussi la présence d'un maximum lorsque $a_2 < a_1$, atteint au croisement entre les formes (3.17) et (3.18). L'estimation numérique du noyau Q obtenue pour des collisions fantômes de particules dans l'écoulement bidimensionnel aléatoire gaussien est représenté dans le plan (a_1, a_2) sur la Fig. 3.3(a). Les coupes unidimensionnelles du noyau représentées sur la Fig. 3.3(b) sont tout à fait comparables à celle prédites par notre approche et représentées sur la Fig. 3.2(b).

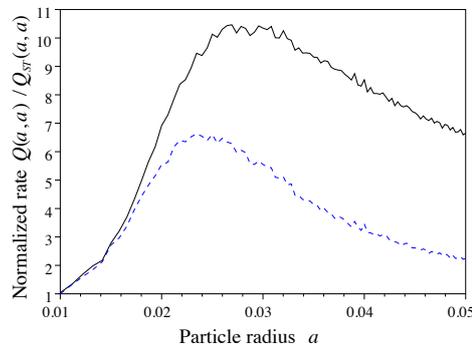


FIGURE 3.4 – Courbe noire continue : taux de collision entre particules de même taille $Q(a, a)$ normalisé par celui obtenu lorsque l'on néglige l'inertie des particules, à savoir la formule de Saffman–Turner (3.12). Courbe bleue en tirets : taux de collision obtenu lorsque l'on néglige les différences de vitesse importantes et que l'on ne prend en compte que la concentration préférentielle des particules (les données sont ici normalisées de la même manière que précédemment). Ces courbes ont été obtenues numériquement dans la même configuration que pour les Figs. 3.3(a) et 3.3(b).

Pour quantifier l'importance de l'inertie, nous avons mesuré le rapport $Q(a, a)/Q_{ST}(a, a)$ entre le noyau mesuré dans un écoulement aléatoire et celui prédit par l'approche de Saffman–Turner (3.12). Les résultats sont présentés sur la Fig. 3.4. Pour séparer les effets de concentration préférentielle et de différence de vitesse, nous avons aussi représenté le noyau obtenu en faisant l'hypothèse que les différences de vitesse se comportent linéairement en fonction de la séparation entre les particules. Notons que les deux courbes coïncident pour les petits rayons : dans ce régime, l'augmentation du taux de collision a principalement pour origine les effets de concentration. Le départ entre les deux courbes se produit assez rapidement, bien avant que le maximum de concentration soit atteint. On voit clairement sur la Fig. 3.4 que dans les deux cas, il y a une augmentation de près d'un ordre de grandeur des collisions entre particules inertielles par rapport au cas des traceurs. Toutefois les valeurs mesurées du noyau sont très différentes selon que l'on prenne ou non en compte les différences de vitesse entre particules. Il est ainsi crucial loin des asymptotiques de ne pas considérer que les effets de concentration et de vitesse sont indépendants.

Pour mieux comprendre ces effets, nous nous intéressons dans la suite de ce chapitre à l'étude de la statistique des différences de vitesse entre deux particules ayant le même nombre de Stokes.

3.2 Suspensions stochastiques de particules lourdes

Nous avons vu depuis le début de ce mémoire que la formation de concentrations est centrale dans la description des suspensions de particules inertielles. La présence de telles inhomogénéités altère aussi bien les propriétés dynamiques des particules que leurs interactions ou leurs taux de collision. Deux mécanismes entrent en compétition dans la formation des concentrations. D'une part, les particules plus lourdes que le fluide sont éjectées des tourbillons de l'écoulement porteur et se concentrent dans les zones de fort cisaillement [EF94]. D'autre part, nous avons vu dans section 1.1.1 que la dynamique dissipative des particules conduit à la convergence de leurs trajectoires vers un attracteur fractal qui évolue

avec la dynamique. Dans de nombreuses études, ce dernier effet est isolé en utilisant pour l'écoulement porteur un champ de vitesse avec un temps de corrélation nul, et donc sans aucune structure persistante. Dans cette section, nous présentons les résultats obtenus dans [BCH07b, BCHT08] pour ce type d'écoulement porteur. Nous nous concentrons sur le mouvement relatif entre particules et supposons que la séparation \mathbf{R} est solution de

$$\ddot{\mathbf{R}} = -\frac{1}{\tau} \left[\dot{\mathbf{R}} - \delta \mathbf{u}(\mathbf{R}, t) \right], \quad (3.19)$$

où les points désignent les dérivées temporelles et τ est le temps de réponse des particules. La différence de vitesse $\delta \mathbf{u}$ est un champ vectoriel aléatoire gaussien de moyenne nulle et de corrélation

$$\langle \delta u^i(\mathbf{r}, t) \delta u^j(\mathbf{r}', t') \rangle = 2b^{ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t'). \quad (3.20)$$

Pour mimer les écoulements turbulents, la structure tensorielle de la partie spatiale $b^{ij}(\mathbf{r})$ de la corrélation spatiale est choisie de manière à satisfaire des conditions d'incompressibilité, d'isotropie, et d'invariance d'échelle, à savoir

$$b^{ij}(\mathbf{r}) = D_1 r^{2h} [(d-1+2h) \delta^{ij} - 2h r^i r^j / r^2], \quad (3.21)$$

où h est l'exposant de Hölder du champ de vitesse du fluide et D_1 mesure l'intensité de ses fluctuations. $h = 1$ correspond à un champ de vitesse différentiable en espace qui est censé reproduire les échelles inertielles d'un écoulement turbulent tandis que $h < 1$ modélise les écoulements irréguliers, comme les échelles inertielles de la turbulence. Nous nous intéressons ici essentiellement au cas $d = 2$; la généralisation aux dimensions différentes sera seulement schématisée.

L'écoulement modèle décrit ci-dessus à l'avantage d'induire une dynamique de Markov pour les particules. De façon plus spécifique, la gaussianité et la décorrélation temporelle du champ de vitesse du fluide impliquent que la densité de probabilité de transition $p(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t | \mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0, t_0)$ de trouver deux particules à une séparation $\mathbf{R}(t) = \mathbf{r}$ avec une vitesse relative $\dot{\mathbf{R}}(t) = \mathbf{v}$ au temps t , sachant que $\mathbf{R}(t_0) = \mathbf{r}_0$ et $\dot{\mathbf{R}}(t_0) = \mathbf{v}_0$ est une solution de l'équation de Fokker-Planck

$$\partial_i p + \sum_i \left(\partial_r^i - \frac{1}{\tau} \partial_v^i \right) (v^i p) - \sum_{i,j} \frac{b^{ij}(\mathbf{r})}{\tau^2} \partial_v^i \partial_v^j p = 0, \quad (3.22)$$

avec la condition initiale $p(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t_0) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}_0)$. Pour maintenir un régime statistiquement stationnaire, cette équation, ainsi que l'équation différentielle stochastique (3.19) doivent être associées à des conditions de bords; nous choisissons ici des conditions réfléchives à une distance L donnée. Pour des écoulements lisses ($h = 1$), l'intensité de l'inertie est mesurée par le nombre de Stokes défini dans ce cas par $St = D_1 \tau$. Pour les écoulements irréguliers ($h < 1$), l'importance de l'inertie dépend à la fois du temps de réponse et de l'échelle à travers un nombre de Stokes local défini comme $St(\mathbf{r}) = D_1 \tau / r^{2(1-h)}$. Comme nous l'avons vu dans la section 1.2.1, cette quantité permet de décrire les propriétés des particules dans des écoulements où le temps de retournement dépend de l'échelle d'observation.

3.2.1 Système réduit et statistiques de la vitesse

En suivant l'approche proposée originalement dans [Pit01], il est possible de réécrire la dynamique (3.19) en fonction de trois variables qui évoluent avec un bruit additif. En introduisant $R = |\mathbf{R}|$ et en effectuant le changement de variables

$$\sigma_1 = (L/R)^{1+h} \mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{R}} / L^2, \quad (3.23)$$

$$\sigma_2 = (L/R)^{1+h} |\mathbf{R} \wedge \dot{\mathbf{R}}| / L^2, \quad (3.24)$$

$$\rho = (R/L)^{1-h}, \quad (3.25)$$

on se ramène au système d'équation

$$\dot{\sigma}_1 = -\sigma_1 / \tau - [h\sigma_1^2 - \sigma_2^2] / \rho + \sqrt{C} \eta_1, \quad (3.26)$$

$$\dot{\sigma}_2 = -\sigma_2 / \tau - (1+h)\sigma_1\sigma_2 / \rho + \sqrt{(1+2h)C} \eta_2, \quad (3.27)$$

$$\dot{\rho} = (1-h)\sigma_1, \quad (3.28)$$

où $C = 2D_1 / (\tau L^{1-h})^2$ et les η_i désignent deux bruits blancs standards indépendants. Les conditions de bord réfléchives en $R = L$ dans l'espace physique impliquent la réflexion en $\rho = 1$. Notons que σ_1 et

σ_2 sont respectivement proportionnels aux différences de vitesse longitudinales et transverses entre les particules. Dans le cas lisse ($h = 1$), on a toujours $\rho = 1$ et les équations (3.26) et (3.27) se découplent de (3.28). La distance R entre les particules évolue alors comme

$$\dot{R} = \sigma_1(t) R. \quad (3.29)$$

Au delà de la réduction du nombre de degrés de liberté, le changement de variables exposé ci-dessus a plusieurs autres avantages. Par exemple, le bruit qui est multiplicatif dans la dynamique originale (3.19) devient additif dans le système réduit (3.26)–(3.28). Toutefois, cette simplification est compensée par la présence de termes de dérive non-linéaires. A noter qu'en dimension plus grande que 2, il y a un terme supplémentaire $\propto 1/\sigma_2$ (voir, par exemple, [DMÖW05, BCH07b]).

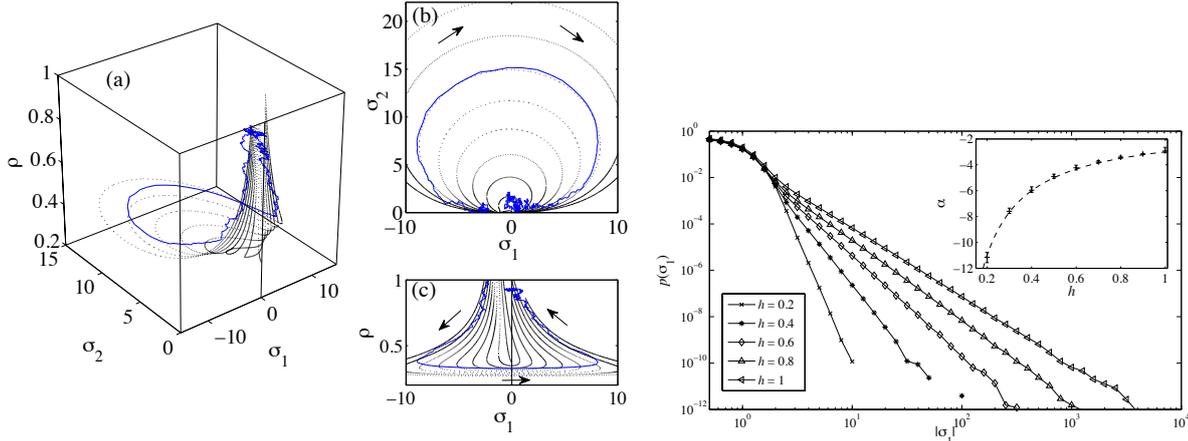


FIGURE 3.5 – Gauche : Réalisation typique d’une trajectoire de la dynamique réduite (3.26)–(3.28) pour $h = 0.7$. Les lignes pointillées représente la dérive. La ligne continue montre une trajectoire avec $St(L) = 1$. (a) Espace $(\sigma_1, \sigma_2, \rho)$ complet, (b) projection sur le plan $\rho = 0$ et (c) sur le plan $\sigma_2 = 0$. Droite : Densité de probabilité de σ_1 pour $St(L) = 1$ et cinq valeurs différentes de l’exposant de Hölder h du fluide. On observe des lois de puissance de la forme $p(\sigma) \propto |\sigma|^{-\alpha}$. Encart : exposant α en fonction de h ; la ligne en tirets correspond à la prédiction $\alpha = 1 + 2/h$.

La figure 3.5 Gauche schématise l’action de la dérive et représente une trajectoire typique dans les variables réduites. La dynamique peut être décrite qualitativement de la manière suivante. La ligne $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ agit comme une ligne fixe stable pour la dérive. Ainsi, une trajectoire typique passe des temps longs à diffuser au voisinage de celle-ci jusqu’à ce que la réalisation du bruit soit suffisamment forte pour laisser la trajectoire s’échapper loin de cette droite. Dès que ceci se produit avec une vitesse relative longitudinale positive ($\sigma_1 > 0$), la trajectoire est ramenée vers la ligne stable par les termes quadratiques de la dérive. Au contraire, si $\sigma_1 < 0$ et $h\sigma_1^2 + \sigma_1\rho - \sigma_2^2 < 0$, la dérive pousse la trajectoire vers les grandes valeurs négatives de σ_1 . Les particules se rapprochent alors les unes des autres et ρ décroît jusqu’à ce que les termes quadratiques dans (3.26) et (3.27) deviennent dominants. La trajectoire effectue alors une boucle dans le plan (σ_1, σ_2) et s’approche de nouveau de la ligne stable par la droite. C’est pendant de telles boucles que la distance entre les particules devient significativement petite. Elles sont donc le mécanisme principal pour, d’une part, la formation des concentrations et, d’autre part, les fortes différences de vitesse.

Des simulations numériques de la dynamique (3.19) montrent que la distribution de probabilité de la différence de vitesse longitudinale σ_1 a des queues algébriques aux grandes valeurs positives et négatives (voir Fig. 3.5 Droite). Comme cela va devenir clair par la suite, ces lois de puissance sont une signature des grandes excursions mentionnées ci-dessus. Considérons la probabilité cumulée $P^<(\sigma) = \Pr(\sigma_1 < \sigma)$ dans l’asymptotique $|\sigma| \gg 1$ avec $\sigma < 0$. Cette quantité peut être estimée comme le produit de deux contributions : (i) la probabilité d’initier une boucle suffisamment grande dans le plan (σ_1, σ_2) pour atteindre des valeurs plus négatives que σ et (ii) la fraction de temps passée par la trajectoire à $\sigma_1 < \sigma$. Proche de la ligne $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$, les termes quadratiques de la dérive sont sous-dominants et peuvent être négligés. σ_1 et σ_2 peuvent alors être approchés par deux processus d’Ornstein–Uhlenbeck indépendants. Au contraire, aux distances suffisamment grande de cette ligne, seuls les termes quadratiques contribuent et le bruit est négligeable. Avec cette dynamique simplifiée, une boucle est initiée à un instant t_0 auquel $\sigma_1(t_0) < -1$ et $\sigma_2(t_0) \ll |\sigma_1(t_0)|$. Une fois que ces conditions sont satisfaites, la trajectoire effectue une boucle dans le plan (σ_1, σ_2) et aussi bien $|\sigma_1(t)|$ que $\sigma_2(t)$ deviennent très grands. La distance maximale de la ligne stable qui donne une estimation du rayon de la boucle est atteinte lorsque σ_2 est de l’ordre de $|\sigma_1|$. Appelons t^* l’instant auquel cela se produit, c’est-à-dire $|\sigma_2(t^*)|/|\sigma_1(t^*)| = O(1)$.

Lorsque l'on néglige le bruit, cette condition conduit à la prédiction suivante pour le rayon de la boucle

$$|\sigma_1(t^*)| \propto [\sigma_1(t_0) + \rho(t_0)/\tau] |\tau\sigma_1(t_0)|^h (\tau\sigma_2(t_0))^{-h}, \quad (3.30)$$

(voir [BCH07b] pour plus de détails). Pour atteindre des différences de vitesses telles que $|\sigma_1| > |\sigma| \gg 1$, le rayon de la boucle doit être plus grand que $|\sigma|$. En utilisant (3.30), on voit que cela implique que $\sigma_2(t_0)$ doit être plus petit que $|\sigma|^{-1/h}$. Ainsi, pour estimer la contribution (i), il faut évaluer la probabilité d'avoir $\sigma_1(t_0) \lesssim -1$ avec $\sigma_2(t_0) < |\sigma|^{-1/h}$ à partir de la dynamique au voisinage de la ligne stable. En approchant les différences de vitesse σ_1 et σ_2 par des processus d'Ornstein–Uhlenbeck indépendants proche de $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$, la première condition donne une contribution de l'ordre de l'unité et la seconde une contribution $\propto |\sigma|^{-1/h}$. Pour estimer (ii), on néglige le bruit dans la dynamique loin de la ligne stable. La probabilité est alors donnée par la fraction de temps passée à $\sigma_1 < \sigma$ qui est proportionnelle à $\sigma_2(t_0) \propto |\sigma|^{-1/h}$. Mises ensemble, ces deux contributions conduisent à $P^<(\sigma) \propto |\sigma|^{-2/h}$ pour $|\sigma| \gg 1$ avec $\sigma < 0$.

Ainsi la queue négative de la densité de probabilité de σ_1 a un comportement $\propto |\sigma|^{-\alpha}$, avec $\alpha = 1 + 2/h$. Pendant ces grandes excursions, les trajectoires atteignent également les grandes valeurs positives de σ_1 et de σ_2 . De nouveau la fraction de temps passée à σ_1 ou σ_2 plus grand que $\sigma \gg 1$ peut être estimée comme $\sigma^{-1/h}$. Ainsi, les distributions de probabilité des différences de vitesse longitudinales σ_1 et transversales σ_2 ont des queues algébriques à droite et à gauche avec l'exposant α . Les deux queues sont représentées sur la droite de la Fig. 3.5. L'encart montre que les mesures sont en bon accord avec la valeur prédite de α . La relation entre α et l'exposant de Hölder h implique en particulier que $\alpha = 3$ dans le cas lisse est qu'il augmente lorsque h décroît. D'ailleurs, une conséquence immédiate de (3.26)–(3.28) est que pendant les boucles, $\rho(t) \propto \rho(t_0)^h$ lorsque $\rho(t_0) \ll 1$. Il devient ainsi de moins en moins probable d'atteindre des petites valeurs de ρ lorsque h diminue. En d'autres termes, la concentration des particules devrait être très forte dans le cas lisse et moins importante lorsque l'irrégularité de l'écoulement est augmentée. Ceci confirme les observations faite dans la section 1.2.1.

Pour conclure cette discussion sur les distributions de différence de vitesse, il est important de remarquer que, même si le changement de variable (3.23)–(3.25) peut être appliqué de la même manière en trois dimensions, l'analyse ci-dessus n'est elle plus valide. Tout d'abord, comme cela a été mentionné plus haut, la dérive contient dans ce cas un terme supplémentaire qui ne permet pas d'écrire explicitement une solution du problème déterministe. Aussi, en dimensions plus grandes que deux, le point fixe de la dynamique est situé loin de l'origine (voir [BCH07b]). Ainsi, les approximations faites ci-dessus ne sont donc pas applicables et les arguments utilisés ici ne permettent pas de prédire la présence ou non de queues algébriques. Les travaux théoriques et numériques présentés dans [GM13] semblent toutefois indiquer que ce soit le cas.

Nous passons maintenant à l'étude des propriétés d'échelle des moments des différences de vitesse. Nous avons vu dans la section 3.1.1 qu'une façon de déterminer les taux de collisions entre particules repose sur l'étude du taux d'approche $\mathcal{K}(r)$ défini comme le flux auquel les particules séparées par une distance inférieure à r se rapprochent les unes des autres. Avec les notations de cette section, la définition du taux (3.4 se réécrit

$$\mathcal{K}(r) = \langle \dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R} / |\mathbf{R}| \theta(-\dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R} / |\mathbf{R}|) \theta(r - |\mathbf{R}|) \rangle, \quad (3.31)$$

où θ désigne la fonction de Heaviside et les moyennes portent sur l'ensemble des trajectoires lagrangiennes. Comme nous l'avons vu dans la section 3.1.1, $\kappa(r) = \partial_r \mathcal{K}(r)$ permet une estimation directe des taux de collisions binaires entre les particules dans le cadre de l'approche dite de « collisions fantômes ». Aux petites séparations, $\mathcal{K}(r)$ permet de définir un exposant de Hölder local $\gamma(r)$ pour les vitesses des particules

$$\gamma(r) = \frac{\ln \mathcal{K}(r)}{\ln r} - d_2(r), \quad (3.32)$$

où $d_2(r)$ est la dimension de corrélation locale de la distribution des particules introduite dans l'équation (1.29) de la section 1.2.1 (voir [BCH07a] pour plus de détails). Dans la définition (3.32), nous nous sommes affranchis de la contribution des propriétés de concentration des particules qui sont contenues dans $d_2(r)$. L'exposant de Hölder local $\gamma(r)$ tend vers une limite finie Γ lorsque $r \rightarrow 0$. Pour des particules dans un écoulement différentiable ($h = 1$), la valeur limite Γ dépend de façon non triviale du nombre de Stokes. De façon similaire à ce que nous avons vu dans la section précédente, on s'attend à retrouver la vitesse du fluide ($\Gamma \rightarrow 1$) dans la limite $St \rightarrow 0$ et à avoir affaire à un gaz de particules indépendantes ($\Gamma \rightarrow 0$) lorsque $St \rightarrow \infty$. Dans le cas irrégulier ($h < 1$), on s'attend à un comportement bien différent. Comme nous l'avons vu plus haut (voir aussi section 1.2.1), les propriétés statistiques des particules séparées par une distance r ne dépendent que du nombre de Stokes local $St(r) = D_1 \tau / r^{2(1-h)}$. Aux

échelles très petites, $St(r) \rightarrow \infty$ et tout se passe donc comme si les particules se déplaçaient de façon balistique dans l'écoulement. Cela signifie que dans cette asymptotique, elles peuvent être à des distances arbitrairement proches avec des différences de vitesse élevées. Pour tout $h < 1$, on a donc $\Gamma = 0$.

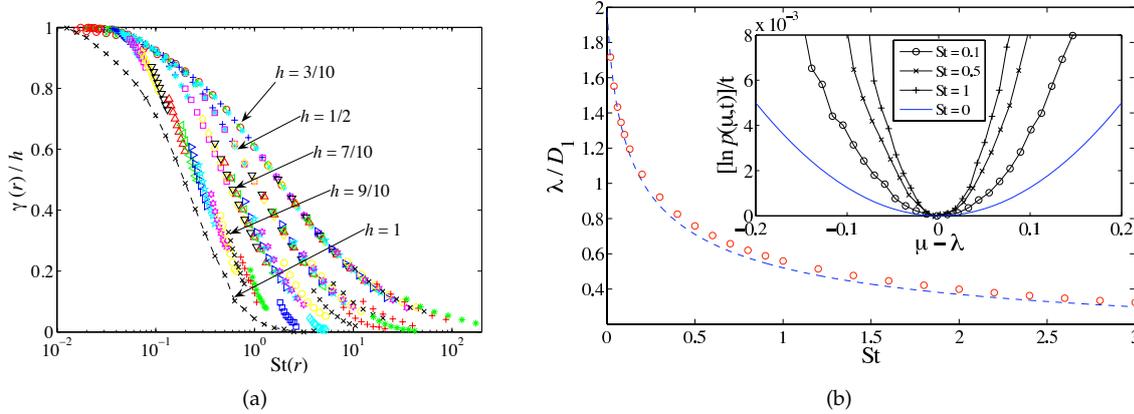


FIGURE 3.6 – Rapport entre l'exposant de Hölder local $\gamma(r)$ et celui de la vitesse du fluide h en fonction du nombre de Stokes local $St(r)$. Les différents symboles correspondent à différentes valeurs du temps de réponse des particules τ . Pour $h = 1$, la valeur limite Γ aux petites échelles est représentée. (b) Exposant de Lyapunov en fonction de St : les cercles représentent les données numériques et la courbe en tirets la prédiction (3.36). Encart : fonction de taux H associée aux grandes déviations du taux d'étirement μ pour trois valeurs de St ; la ligne continue correspond à la fonction de taux des traceurs dont l'expression analytique est connue (voir, par, exemple, [FGV01]).

La figure 3.6(a) montre des mesures numériques de l'exposant $\gamma(r)/h$ en fonction du nombre de Stokes local $St(r)$ pour différentes valeurs de h . Dans le cas lisse, on observe bien un comportement similaire à celui observé dans des écoulements avec un temps de corrélation finie étudiés dans la section précédente. On voit que pour tous les nombres de Stokes, $\Gamma < 1$, ce qui peut être vu comme une conséquence de la contribution des caustiques aux statistiques de la différence de vitesse. Dans les écoulements non-différentiables, l'exposant local $\gamma(r)$ s'approche asymptotiquement de l'exposant de Hölder du fluide dans la limite $St(r) \rightarrow 0$ (correspondant à $r \rightarrow \infty$). Il s'approche de la valeur limite $\Gamma = 0$ aux très petites échelles où $St(r) \rightarrow \infty$. Toutes les informations pertinentes sont donc contenues dans le comportement intermédiaire de $\gamma(r)$. Le chevauchement des données numériques associées à différentes valeur de r et τ confirmer que cet exposant ne dépend que du nombre de Stokes local et de l'exposant de Hölder h du fluide. La transition de $\gamma(r) = h$ à $\gamma(r) = 0$ se translate vers les plus grandes valeurs de $St(r)$ lorsque h décroît. À noter que la convergence $\gamma(r) \rightarrow h$ pour $r \rightarrow \infty$ implique, comme nous allons le voir dans la sous-section suivante, que les particules suivent asymptotiquement aux temps longs la même dispersion relative explosive que les traceurs.

3.2.2 Taux d'étirement et dispersion relative

Nous nous intéressons ici au comportement de la distance $R(t)$ entre deux particules aux temps intermédiaires t tels que $R(0) \ll R(t) \ll L$. Pour simplifier la discussion, nous nous affranchissons de la condition de bord à $R = L$ et considérons des particules qui évoluent dans un domaine infini.

Considérons d'abord le cas d'un écoulement fluide différentiable ($h = 1$). Dans ce cas, l'évolution temporelle de la distance $R(t)$ est donnée par (3.29), de telle sorte que

$$R(t) = R(0) \exp \left[\int_0^t \sigma_1(t') dt' \right]. \quad (3.33)$$

La séparation entre les particules est gouvernée par le *taux d'étirement* $\mu(t) \equiv (1/t) \ln[R(t)/R(0)]$. La dynamique réduite (3.26)–(3.28) est ergodique [GHW11]. Cela implique que les moyennes temporelles convergent vers les moyennes d'ensemble. Ainsi,

$$\mu(t) = \frac{1}{t} \int_0^t \sigma_1(t') dt' \rightarrow \langle \sigma_1 \rangle \quad \text{as } t \rightarrow \infty. \quad (3.34)$$

En d'autres termes, la distance entre les particules se comporte asymptotiquement comme $R(t) = R(0) \exp(t\lambda)$, où $\lambda = \langle \sigma_1 \rangle$ est l'exposant de Lyapunov (voir section 1.1.1).

La figure 3.6(b) montre les mesures numériques de l'exposant de Lyapunov λ pour la dynamique stochastique (3.19). L'exposant est positif pour toutes les valeurs du nombre de Stokes, signifiant qu'au

contraire du cas compressible, les particules dans des écoulements incompressibles ne peuvent pas être dans un régime de concentration forte. Une des premières tentatives d'obtenir une expression analytique pour $\lambda(St)$ a été proposée dans [Pit01]. Ces travaux se basent sur la transformée de Laplace $\varphi(p)$ de la distribution de la variable aléatoire complexe $z = \sigma_1 + i\sigma_2$, à savoir $\varphi(p, t) = \langle \exp(-pz(t)) \rangle$ qui satisfait

$$\partial_t \varphi = -(p/\tau) \partial_p \varphi + p \partial_p^2 \varphi - (2D_1/\tau) p^2 \varphi. \quad (3.35)$$

Si $\varphi(p, t)$ atteint un régime stationnaire, on peut obtenir une expression analytique pour la solution asymptotique $\varphi_\infty(p)$ en annulant le membre de droite de (3.35). On peut alors obtenir directement l'exposant de Lyapunov comme $\lambda = -\lim_{p \rightarrow 0} \text{Re} \{ \partial_p \varphi_\infty \}$. Ceci implique que

$$\lambda = -\frac{D_1}{2St} \text{Re} \left\{ 1 + \frac{\text{Ai}'(x)}{\sqrt{x} \text{Ai}(x)} \right\}, \quad x = (16 St)^{-2/3}, \quad (3.36)$$

où Ai est la fonction d'Airy de la première espèce. Cette prédiction est comparée aux simulations numériques sur la Fig. 3.6(b). Comme cela a été souligné dans [MWD⁺05], on peut montrer que les moments $\varphi(p, t)$ divergent aux temps longs et ne convergent donc pas vers un état stationnaire. Ceci peut expliquer les déviations observées sur la Fig. 3.6(b). Toutefois, la précision numérique n'est pas suffisante pour tester les déviations à l'expression analytique (3.36).

Aux instants t grands mais finis, la distance entre les deux particules est mesurée par le taux d'étiement $\mu(t) = (1/t) \ln[R(t)/R(0)]$. Comme nous l'avons vu dans la section 1.1.1, lorsque le temps augmente, la distribution de cette quantité est de plus en plus concentrée sur l'exposant de Lyapunov λ et suit un principe de grandes déviations. Sa densité de probabilité $p(\mu, t)$ prend la forme asymptotique

$$\frac{1}{t} \ln p(\mu, t) \sim -H(\mu), \quad (3.37)$$

où H est une fonction positive, convexe, atteignant son minimum en $\mu = \lambda$ avec $H(\lambda) = 0$. La fonction de taux H mesure les grandes fluctuations de μ , qui sont importantes pour quantifier les propriétés de concentration des particules (voir section 1.1.1). Les fonctions de taux obtenues numériquement pour le modèle stochastique sont représentées sur la Fig. 3.6(b) pour différentes valeurs du nombre de Stokes. La fonction se resserre lorsque St augmente, un phénomène que nous quantifieront dans la sous-section suivante pour l'asymptotique $St \rightarrow \infty$. Aussi, nous verrons dans le chapitre suivant (section 4.2.1) que le même comportement est observé pour des particules lourdes suspendues dans des écoulements en turbulence homogène isotrope.

Nous passons maintenant au cas des particules suspendues dans des écoulement non-différentiables ($h < 1$). Comme nous avons laissé tomber la condition de bord, la seule échelle pertinente devient la séparation initiale $R(0)$ entre les particules. En utilisant $R(0)$ plutôt que L dans le changement de variables (3.23)–(3.25), le problème de la dispersion relative s'exprime seulement en fonction de l'exposant de Hölder h et d'un nombre de Stokes dépendant du temps défini comme $St(t) = D_1 \tau / [R(t)]^{2(1-h)}$. D'après l'équation d'évolution (3.28) pour la séparation réduite $\rho(t) = [R(t)/R(0)]^{1-h}$, on obtient

$$\rho(t) = 1 + (1-h) \int_0^t \sigma_1(t') dt'. \quad (3.38)$$

Typiquement, $\rho(t)$ croît en fonction du temps. Cela signifie que le nombre de Stokes dépendant du temps $St(t) = D_1 \tau / R^{2(1-h)} = St(0) / \rho^2$ lui décroît. Ainsi, contrairement au cas des écoulements lisses, σ_1 n'est pas un processus stationnaire et l'intégrale dans (3.38) ne converge pas vers $t \langle \sigma_1 \rangle$.

Dans la suite, nous focalisons la discussion sur cas $St(0) \gg 1$ qui contient une physique plus riche que les plus petites valeurs. Comme cela peut être observé sur la Fig. 3.7(a), on peut faire la distinction entre deux régimes dans le comportement de $\rho(t)$. D'abord, la séparation des particules évolue de façon balistique $R(t) \propto t$, signifiant que le nombre de Stokes dépendant du temps $St(t)$ décroît comme $t^{-2/(1-h)}$ (voir encart de la Fig. 3.7(a)) et atteint des valeurs de l'ordre de l'unité pour $t \approx \tau$. Pendant cette phase, la croissance temporelle de ρ est accélérée ou ralentie pour s'approcher du mouvement diffusif $\propto t^{1/2}$. Ceci correspond à la limite des traceurs dont les particules s'approche lorsque $St(t) \ll 1$. La distance inter-particules se comporte alors comme $R(t) \propto t^{1/2(1-h)}$ et, en conséquence, $St(t)$ décroît comme $1/t$ (voir Fig. 3.7(a)). Nous verrons dans la section 4.2.2 qu'un comportement similaire est observé pour des particules lourdes dans des écoulement hydrodynamiques turbulents.

La convergence vers la diffusion des traceurs dans la limite des grandes distances R donne une façon originale d'interpréter la loi de Richardson dans un écoulement delta-corrélé en temps en termes du comportement asymptotique des variables réduites (3.23)–(3.25). Lorsque ρ est grand, les termes

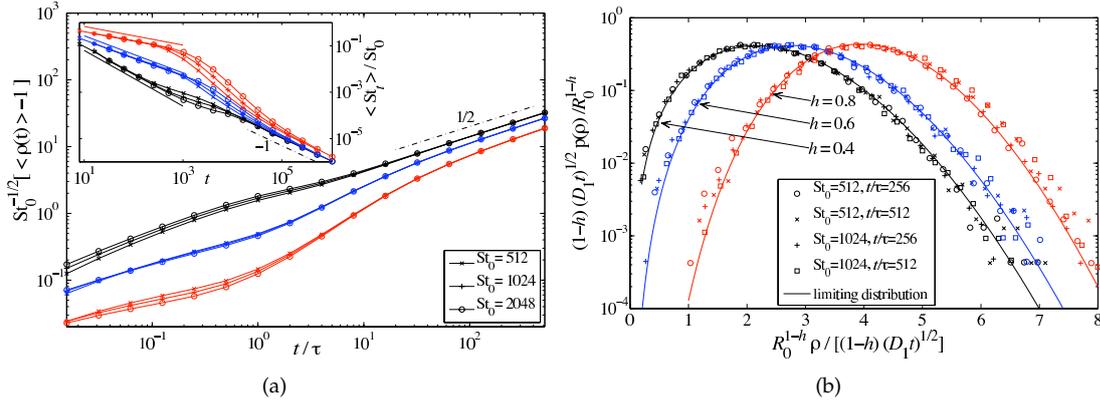


FIGURE 3.7 – (a) Évolution temporelle de la séparation réduite $\langle (\rho(t) - \rho(0)) \rangle$ pour différents nombres de Stokes initiaux $St(0)$ et $h = 0.4$ (noir), 0.6 (bleu) et 0.8 (rouge). Encart : comportement aux temps longs du nombre de Reynolds dépendant du temps $St(t) = D_1 \tau / \rho^2(t)$ pour les même valeur de $St(0)$ et de h que précédemment. (b) Densité de probabilité de la séparation réduite $\rho(t)$ pour différentes combinaisons du temps et de $St(0)$. Les courbes continues représentent la distribution limite donnée par (3.39) avec $A = 1/4$.

quadratiques de la dérive dans (3.26) peuvent être négligés et σ_1 se comporte comme un processus d’Ornstein–Uhlenbeck avec un temps de réponse τ . Toutefois, lorsque σ_1 devient de l’ordre de $\rho/(h\tau)$, les termes quadratiques cessent d’être négligeables et ils repoussent la trajectoire vers les σ_1 positifs. Ce processus se produit sur des échelles de temps de l’ordre de un, et ainsi bien plus petites que les échelles de temps pertinentes pour la dispersion relative à grande échelle. Ainsi, la dynamique de $\sigma_1(t)$ peut être approximée par un processus d’Ornstein–Uhlenbeck avec une condition de bord reflective en $\sigma_1 = \rho/(h\tau)$. Ceci implique que ρ a un comportement diffusif. De façon plus précise, les simulations numériques montrent sur la Fig. 3.7(b) que la distribution de ρ se comporte comme

$$p(\rho, t) \propto \rho^\nu t^{-(\nu+1)/2} \exp[-A\rho^2/t], \quad (3.39)$$

où $\nu = (1+h)/(1-h)$ et A est une constante positive. Aux temps longs, et donc lorsque $St(t) \rightarrow 0$, la limite des traceurs est retrouvée comme cela est confirmé lorsque l’on remplace ρ par $R = \rho^{1/(1-h)}$ dans l’expression (3.39).

Nous reviendrons dans la section 4.2.2 du chapitre suivant sur les propriétés de dispersion relative à petites et grandes échelles de particules inertielles.

3.2.3 Asymptotique des grands nombres de Stokes

Les particules avec une inertie très forte ($St \gg 1$) ont besoin d’un temps très long pour relaxer vers la dynamique du fluide. Elles se décorrèlent donc de l’écoulement porteur et évoluent avec une dynamique balistique où elle maintiennent approximativement leur vitesse initiale. Ce comportement limite est propice au développement de théories asymptotiques. Nous avons montré dans [BCH07b] que lorsque le temps de réponse τ des particules est plus grand que toutes les échelles caractéristiques de l’écoulement, la dynamique relative de celles-ci peut être approchée par le modèle (3.19)-(3.20) de particules transportées par un écoulement gaussien de temps de corrélation nul.

La limite des grands nombres de Stokes permet de simplifier plus avant le problème des suspensions stochastiques de particules et de développer des arguments sur les lois d’échelle gouvernant cette asymptotique. Ces arguments, utilisés pour la première fois dans [Hor05], reposent sur l’idée que l’asymptotique $St \rightarrow \infty$ peut être approchée en prenant la limite $\tau \rightarrow \infty$ tout en gardant constante la quantité $C = 2D_1/(\tau L^{1-h})^2$ apparaissant dans la dynamique réduite (3.26)–(3.27) pour les vitesses relatives des particules. Avec cette approche spécifique de la limite, on peut aisément vérifier que dans le cas bidimensionnel, les vitesses relatives σ_1 et σ_2 définies par (3.23)-(3.24) satisfont

$$\dot{\sigma}_1 \simeq -(h\sigma_1^2 - \sigma_2^2)/\rho + \sqrt{C} \eta_1, \quad (3.40)$$

$$\dot{\sigma}_2 \simeq -(h+1)\sigma_1\sigma_2/\rho + \sqrt{(1+2h)C} \eta_2. \quad (3.41)$$

Pour une valeur de h fixée, la dynamique asymptotique ne dépend que de la constante C alors que la dynamique de base dépendait aussi du nombre de Stokes $St(L)$ (voir plus haut). Ceci permet ainsi de déduire les lois d’échelle que doivent suivre les distributions de σ_1 et σ_2 dans la limite $St \rightarrow \infty$. Regardons ce qui se passe pour la différence de vitesse longitudinale σ_1 pour h et r fixés. D’une part,

nous avons vu plus haut que la dynamique relative des particules ne dépend que du nombre de Stokes $St(L) = D_1\tau/L^{2(1-h)}$ une fois l'axe des temps redimensionné par τ . D'autre part, les statistiques de σ_1 ne dépendent que de C dans la limite $\tau \rightarrow \infty$. La compatibilité entre ces deux régimes conduit à écrire pour $\sigma_1 \gg (1/\tau)$

$$\tau \tilde{p}(\tau\sigma_1; St(L)) \simeq p(\sigma_1; C). \quad (3.42)$$

En prenant les dérivées par rapport à D_1 et à τ , on obtient une condition nécessaire pour un tel comportement : p doit satisfaire l'équation aux dérivées partielles

$$p + \sigma_1 \partial_{\sigma_1} p + 3C \partial_C p = 0, \quad (3.43)$$

qui implique elle-même que $p(\sigma_1; C) = C^{-1/3} f(C^{-1/3}\sigma_1)$, de telle sorte que

$$p(\sigma_1) \simeq St^{-1/3} \tau f(St^{-1/3} \tau \sigma_1) \quad \text{pour } St \gg 1. \quad (3.44)$$

Comme nous le voyons sur la Fig. 3.8(a), cette loi d'échelle asymptotique peut être observée dans les simulations numériques du modèle stochastique.

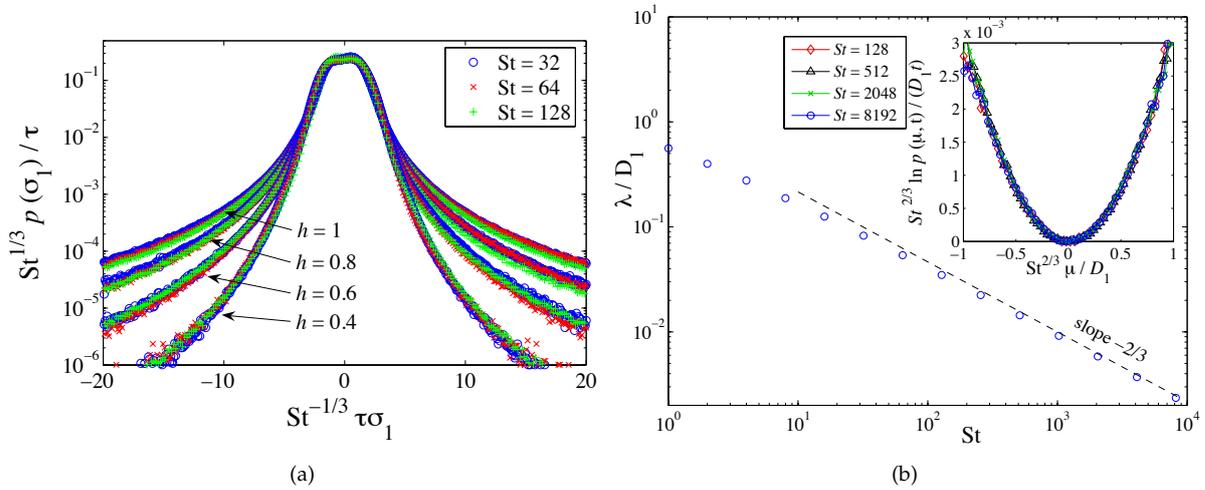


FIGURE 3.8 – (a) Densités de probabilité de la différence de vitesse longitudinale adimensionnée σ_1 aux grandes valeurs de St et pour différentes valeurs de h . (b) Exposant de Lyapunov λ en fonction de St . La ligne en tirets représente la prédiction (3.45). Encart : fonction de taux $H(\mu)$ pour différentes valeurs de St .

Dans le cas des écoulements lisses, une conséquence de (3.44) est que l'exposant de Lyapunov $\lambda = \langle \sigma_1 \rangle$, qui mesure le taux de croissance asymptotique de la séparation infinitésimale entre particules se comporte comme

$$\lambda \simeq c D_1 St^{-2/3} \quad \text{pour } St \gg 1, \quad (3.45)$$

où c est une constante positive indépendante des paramètres. Nous avons montré dans [BCH07b] que ce résultat reste valable en trois dimensions. Sa confirmation numérique en dimension deux est montrée sur la Fig. 3.8(b).

Les arguments d'échelle utilisés ci-dessus peuvent être étendu au cas des fluctuations du taux d'étirement $\mu(t) = (1/t) \ln[R(t)/R(0)]$. Comme nous l'avons vu dans la sous-section précédente, la distribution de μ suit au temps longs le principe de grandes déviations (3.37). On peut montrer (voir [BCH07b] pour plus de détails) que la fonction de taux associée $H(\mu) = \lim_{t \rightarrow \infty} (1/t) \ln p(\mu, t)$ satisfait

$$H(\mu) \simeq D_1 St^{-2/3} h(St^{2/3} \mu / D_1) \quad \text{pour } St \gg 1. \quad (3.46)$$

Ces propriétés d'échelle sont confirmées par les simulations numériques (voir encart de la Fig. 3.8(b)).

Nous faisons finalement quelques commentaires sur la façon dont les taux d'étirement dépendent du nombre de Stokes. Un développement de Taylor de H au voisinage de son minimum associé à la loi d'échelle (3.46) montre que l'écart type du taux d'étirement est de l'ordre de $St^{-1/3} / \sqrt{t}$. Pour un temps t fixé, le taux d'étirement devient de plus en plus proche de λ lorsque St augmente. Nous verrons dans le chapitre suivant (section 4.2.1) que ce comportement est aussi observé en turbulence.

3.3 Distribution des vitesses relatives dans les écoulements turbulents

Nous revenons dans cette section aux statistiques des différences de vitesse pour exploiter le formalisme introduit dans la section 3.1 dans le cas de particules lourdes transportées par un écoulement hydrodynamique turbulent. Les résultats décrits dans [BBC⁺10] ont utilisé des simulations numériques directes de particules ponctuelles lourdes en turbulence homogène isotrope pour montrer que les statistiques de leur vitesses relatives sont extrêmement intermittentes. Nous verrons dans la sous-section 3.3.1 que lorsque les particules sont à des distances aux échelles dissipatives de la turbulence, la compétition entre des régions régulières calmes et les caustiques conduisent à un comportement quasiment bifractal des fonctions de structure de la vitesse des particules, les moments d'ordres les plus élevés portant avec eux la signature statistique des caustiques. En revanche, pour les particules séparées par des distances aux échelles inertielles, nous verrons dans la section 3.3.2 que les statistiques des différences de vitesse peuvent être caractérisées en terme d'un nombre de Stokes dépendant de l'échelle similaire à celui introduit dans la section précédente pour les écoulements aléatoires invariants d'échelle.

Nous avons vu dans la section 3.1 que le taux de collision entre particules peut être évalué en utilisant l'approche dite de « collisions fantômes » qui suppose que les particules peuvent occuper n'importe quel point de l'espace indépendamment de la position des autres. Le taux de collision géométrique est alors déterminé par la valeur en $r = 2a$ du taux d'approche

$$\kappa(r; St) = - \left\langle \dot{R} \mid R=r \text{ et } \dot{R} \leq 0 \right\rangle p_2(r). \quad (3.47)$$

Ici R désigne la distance entre deux particules de nombre de Stokes St , et p_2 sa densité de probabilité. La moyenne est effectuée sur le temps et les différentes paires de particules et est conditionné sur le fait qu'elles sont à une distance r et qu'elles s'approchent l'une de l'autre. Aussi bien les effets de concentration préférentielle que les caustiques (voir Fig. 3.9(a)) apparaissent dans (3.47) ; les premiers affectant la dépendance en r de p_2 et les autres la moyenne conditionnée de \dot{R} .

Nous nous concentrons ici sur les propriétés d'échelle des statistiques de la vitesse en regardant le comportement en fonction de la séparation r de la fonction de structure longitudinale de la vitesse des particules

$$S_p(r; St) = \left\langle |\dot{R}|^p \mid R=r \right\rangle. \quad (3.48)$$

Le choix que nous avons effectué de définir les fonctions de structure avec des valeurs absolues est motivé par leur relations au noyau de collision, via le taux d'approche. Comme on l'a vu précédemment, on a en effet vu que $\kappa(r) = (1/2)S_1(r; St)p_2(r)$. L'évaluation de $S_p(r; St)$ pour des valeurs de p différentes de 1 donne une caractérisation plus complète des statistiques de vitesse et permet ainsi de prendre en compte les fluctuations locales de taux d'approche. Dans la limite d'une inertie nulle, la différence de vitesse \dot{R} coïncide avec les différences de vitesse du fluide à une séparation R . Au contraire, lorsque $St \rightarrow \infty$, les particules se déplacent de façon balistique dans l'écoulement avec des vitesses décorréelées et les fonctions de structure $S_p(r; St)$ deviennent indépendantes de r . Aux valeurs intermédiaires du nombre de Stokes, on s'attend à un comportement non-trivial de S_p en fonction de r et St . Pour accéder à celui-ci, nous avons utilisé les résultats de simulations numériques directes. La figure 3.9(b) représente le comportement de la fonction de structure du second ordre $S_2(r; St)$ pour deux valeurs différentes du nombre de Reynolds (voir [BBL⁺10] pour les détails sur les simulations). On peut distinguer deux régimes différents, selon que r soit aux échelles dissipatives ou inertielles. Alors que le comportement pour $r \ll \eta$ est en relation directe avec l'estimation du noyau de collision, le comportement aux échelles inertielles a , comme nous le verrons dans le chapitre suivant, des implications sur la dispersion relative des particules lourdes en turbulence. Dans la suite, nous regardons ces deux régimes indépendamment.

3.3.1 Différences de vitesse aux échelles dissipatives

Aux échelles dissipatives, les fonctions de structure des particules se comportent comme une loi de puissance $S_p(r; St) \propto r^{\xi_p}$. Les deux asymptotiques de faible et forte inertie impliquent que $\xi_p \simeq p$ pour $St \ll 1$ et $\xi_p \rightarrow 0$ pour $St \rightarrow \infty$. Pour les valeurs intermédiaires du nombre de Stokes, $p \mapsto \xi_p(St)$ est une fonction convexe de l'ordre p . La figure 3.10(a) montre l'exposant du premier ordre ξ_1 en fonction du nombre de Stokes. On voit clairement que pour $St = O(1)$, l'exposant ξ_1 prend des valeurs non-triviales dans tout l'intervalle $[0, 1]$. La précision des données actuelles ne permet pas de savoir si l'exposant sature abruptement lorsqu'il s'approche des deux limites ou bien s'il s'en approche asymptotiquement. Aussi, cette précision limitée ne nous permet pas de détecter une quelconque dépendance en R_λ . Malgré

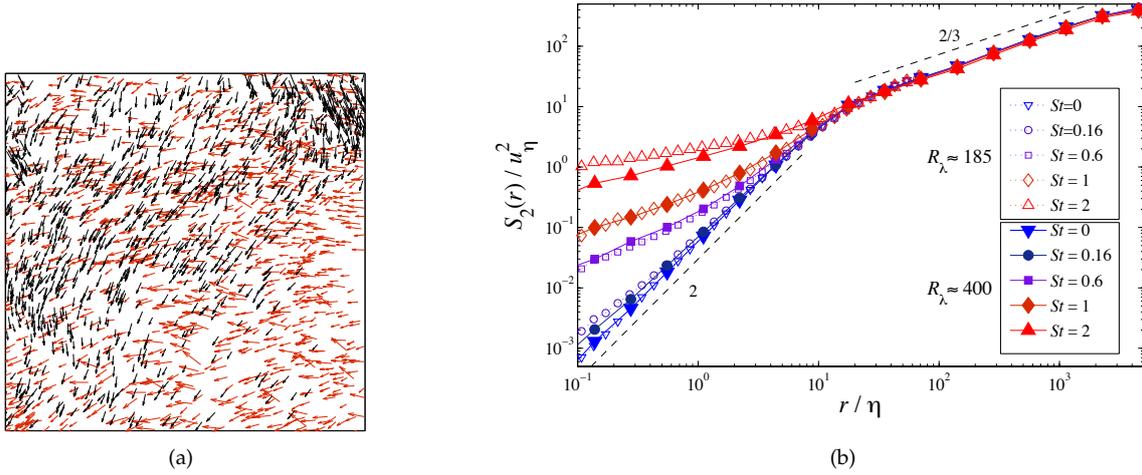


FIGURE 3.9 – (a) Champ de vitesse des particules associées à $St = 20$ dans une tranche de l'écoulement de taille $5\eta \times 100\eta \times 100\eta$ pour $R_\lambda \approx 400$; deux populations de particules avec des vitesses différentes (en rouge et en noire) sont mises en évidence. (b) Fonction de structure longitudinale du second ordre des particules associées à différents nombres de Stokes et pour deux valeurs du nombre de Reynolds.

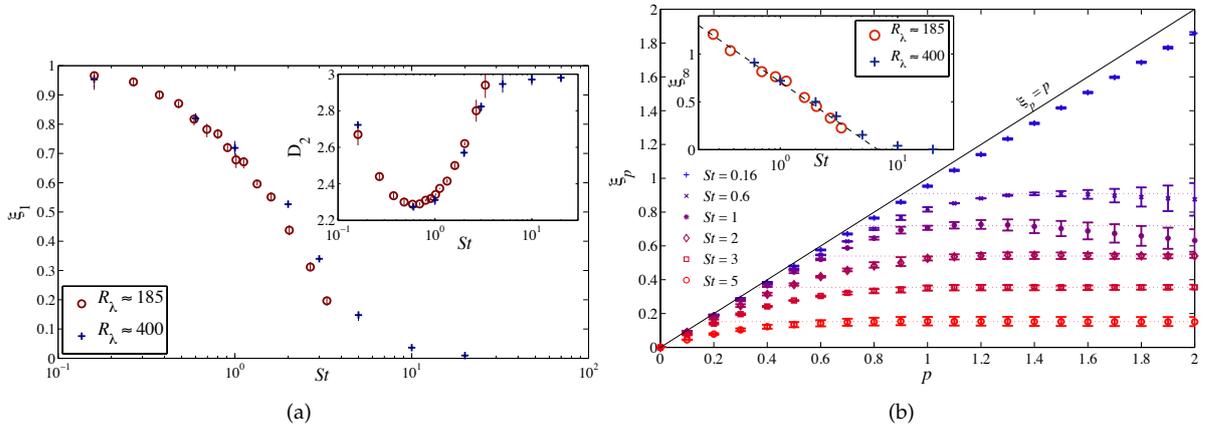


FIGURE 3.10 – (a) Exposant d'échelle ξ_1 en fonction de St pour les deux valeurs de R_λ . Encart : dimension de corrélation D_2 en fonction de St . (b) Exposants ξ_p des fonctions de structure S_p des particules en fonction de St pour $R_\lambda \approx 400$. Encart : exposant de saturation ξ_∞ en fonction de St pour les deux valeurs de R_λ . Tous ces exposants sont obtenus en mesurant la moyenne de la dérivée logarithmique sur les échelles $0.2 \leq (r/\eta) \leq 2$; les barres d'erreur correspondent aux erreurs maximales observées à ces échelles.

le facteur deux en nombre de Reynolds, l'écart entre les données est plus faible que les erreurs effectuées sur la détermination des exposants ou du temps de Kolmogorov τ_η utilisé pour définir St .

Une considération rapide des variations de ξ_1 en fonction du nombre de Stokes donne l'impression d'une inconsistance avec la vision naïve du rôle des caustiques dans les statistiques des différences de vitesse entre les particules. Les caustiques font partie de la théorie des catastrophes [ASZ82]; elles se produisent lorsque des particules rapides rattrapent celles plus lentes pour créer des régions où plusieurs vitesses peuvent être trouvées à la même position spatiale comme cela est illustré sur la Fig. 3.9(a). Si les particules conservent leurs vitesses et se déplacent de façon balistique, de telles caustiques s'étendent sur tout le domaine (d'où l'analogie avec les caustiques formées par les rayons lumineux [WM05]). Les différences typiques de vitesse entre deux particules deviennent dans ce cas indépendantes de leur distance, ce qui signifie que les fonctions de structure tendent vers une constante lorsque $r \rightarrow 0$, et donc que $\xi_p = 0$, comme cela semble par exemple être observé dans [SC12]. Toutefois, il y a deux raisons pour lesquelles cette vision en termes de champ continu rencontre des limites. La première est que, du fait de leur dynamique dissipative, les particules se concentrent sur des attracteurs dynamiques dans l'espace des phases positions-vitesses. Ces ensembles sont fractals et corrélés avec l'écoulement du fluide; ils conduisent ainsi à la formation de caustiques de différentes ampleurs avec des propriétés d'échelles non triviales. La seconde raison est que la vitesse des particules relaxe vers celle du fluide; l'extension spatio-temporelle de telles caustiques peut donc avoir des propriétés statistiques complexes.

Pour mieux quantifier la contribution des caustiques, nous avons étendu notre étude à l'ensemble des

exposants ξ_p ; ceux-ci sont représentés sur la Fig. 3.10(b) pour différentes valeurs du nombre de Stokes. Aux petits ordres, les exposants sont quasiment tangents à la ligne $\xi_p = p$ tandis qu'aux ordres élevés, ils s'approchent ou saturent vers une valeur asymptotique ξ_∞ . Cet exposant de saturation décroît de façon monotone avec le nombre de Stokes, comme cela est montré dans l'encart de la figure. Les données numériques suggèrent que $\xi_\infty \propto \ln(1/St)$ pour $St \lesssim 7$ et que $\xi_\infty \simeq 0$ pour $St \gtrsim 7$. La précision actuelle des données ne permet pas de distinguer entre une transition abrupte ou bien lisse en $St \simeq 7$. On peut noter que la valeur estimée pour ce nombre de Stokes critique est très proche de celle à partir de laquelle la dimension de corrélation \bar{D}_2 sature à $d = 3$ (voir encart de la Fig. 3.10(a)). Comme cela est débattu dans [DFT08], une saturation de \bar{D}_2 vers la dimension de l'espace est attendue pour les valeurs de St auxquelles les caustiques deviennent dominantes. Dans cet esprit, on peut aussi remarquer que l'exposant de saturation ξ_∞ peut être interprété comme la co-dimension $d - \mathcal{D}^{(c)}$ des grandes caustiques associées à des sauts de vitesse de l'ordre de l'unité. En effet, de telles caustiques contribuent à la fonction de structure $S_p(r; St)$ un terme de la forme $V_p P(r)$ où V_p est le moment d'ordre p de la différence de vitesse à l'intérieur de ces caustiques et $P(r)$ est la probabilité de rencontrer une telle caustique dans une boîte de taille r . La saturation des exposants suggère que $P(r) \propto r^{\xi_\infty}$, de telle sorte que $\mathcal{D}^{(c)} \equiv 3 - \xi_\infty$ est la dimension fractale des caustiques les plus fortes. Aux ordres plus petits, les statistiques sont dominées par d'autres événements pour lesquels on peut concevoir deux scénarios possibles. Le premier est que la distribution des caustiques recouvre toutes les différences de vitesse possibles avec des co-dimensions non-trivialement reliées à ces tailles. Dans ce cas, les caustiques affectent la statistique des différences de vitesse à tous les ordres; celle-ci a donc des propriétés multi-échelles et les exposants ξ_p ont un comportement non-trivial avant de saturer (comme par exemple dans le cas des incréments du scalaire passif en turbulence [CLMV00]). L'alternative à ce scénario est que les caustiques sont distribuées aléatoirement avec une taille typique et qu'elles ne dominent la statistique que pour les moments d'ordres suffisamment élevés tandis que les ordres plus bas sont contrôlés par les régions lisses de la vitesse des particules. Dans ce cas, les fonctions de structure ont un comportement bifractal similaire à celui obtenu pour les solutions aléatoires de l'équation de Burgers (voir, par exemple, [BK07]), à savoir $\xi_p = p$ pour $p \leq \xi_\infty$ et $\xi_p = \xi_\infty$ pour $p \geq \xi_\infty$. Les résultats numériques actuels ne permettent pas de distinguer entre ces deux possibilités. Comme nous le voyons sur la Fig. 3.10(b), les exposants montrent des déviations par rapport à un comportement bifractal. Toutefois, comme cela a déjà été observé dans d'autres situations [MBPF05], ces propriétés multi-échelles apparentes pourraient être un artefact dû à la présence de termes sous-dominants ou de corrections logarithmiques.

Pour mieux évaluer la contribution des caustiques aux propriétés d'échelle de la vitesse, on s'est intéressé aux propriétés statistiques de la différence de vitesse longitudinale $\sigma = \dot{R}/R$ que nous avons introduite dans la section 3.2.1 pour les suspensions stochastiques. Dans le cas d'un écoulement porteur gaussien décorréolé en temps, la dynamique de σ devient indépendante de R aux très petites échelles. Ceci est loin d'être vérifié dans les écoulements turbulents où les corrélations temporelles et les structures cohérentes jouent un rôle déterminant. Aussi, les résultats pour les écoulements aléatoires que nous avons exposé précédemment suggèrent que la densité de probabilité conditionnée $p(\sigma | R=r)$ devient indépendante de σ aux petites échelles et a des queues en loi de puissance. Comme on le voit

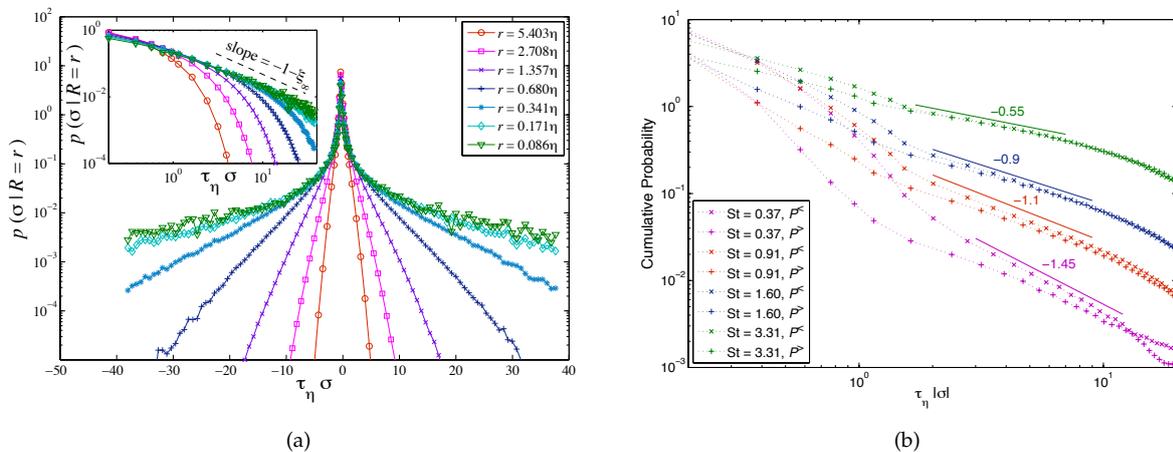


FIGURE 3.11 – (a) Densités de probabilité de la différence de vitesse réduite $\sigma = \dot{R}/R$ conditionnées sur différentes valeurs de r et pour $St = 3.3$ et $R_\lambda \approx 185$. Encart : idem en log-log pour la queue droite. (b) Probabilités cumulées de σ en coordonnées logarithmiques pour différents nombres de Stokes; dans chaque cas, les lignes pleines correspondent à la pente $-(1 + \xi_\infty)$ obtenue à partir de la mesure de l'exposant de saturation.

sur la Fig. 3.11(a), les mesures numériques dans des écoulements turbulents suggèrent des propriétés similaires à celles des écoulements aléatoires. Le coeur des distributions associées à différentes séparations convergent pour $|\sigma| \lesssim \sigma^*(r)$ vers une distribution avec un comportement quasiment algébrique. Comme on le voit sur la Fig. 3.11(b), l'exposant de la loi de puissance est très proche de $-(1 + \xi_\infty)$, ce qui suggère que $\langle \sigma^p \rangle$ diverge pour $p > \xi_\infty$, un comportement qui appuie le scénario bifractal. En effet, on peut écrire $S_p(r; St) = r^p \langle \sigma^p | R=r \rangle \simeq r^p \langle \sigma^p \rangle$ pour $r \rightarrow 0$ et p tel que $\langle \sigma^p \rangle < \infty$. Toutefois, pour $|\sigma| \gtrsim \sigma^*(r)$, les distributions montrent une coupure de forme exponentielle étirée, dont la contribution à la fonction de structure n'est pour le moment pas complètement comprise. Ces queues lointaines sont liées à la distribution de taille des caustiques et pourraient conduire à des propriétés multi-échelle. Une question liée est la relation enchevêtrée entre les concentrations de particules et les grandes différences de vitesse, comme cela a été observé dans les écoulements aléatoires [Oll08], qui pourrait de nouveau favoriser une version multi-échelle. L'obtention d'évidence numérique forte qui permettrait de trancher entre le scénario bifractal et une distribution multi-échelle demanderait d'étudier dans cette optique des situations dans lesquelles les statistiques peuvent être contrôlées d'une façon plus systématique, comme par exemple dans des écoulements aléatoires corrélés en temps ou des solutions de l'équation de Navier-Stokes avec des nombres de Reynolds bien plus faibles.

3.3.2 Comportement aux échelles inertielles

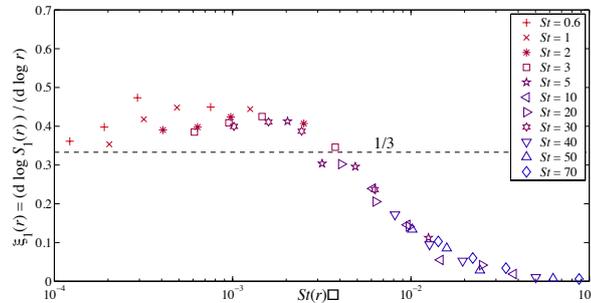


FIGURE 3.12 – Exposant local du premier ordre $\xi_1(r)$ en fonction du nombre de Stokes local $St(r)$ pour $R_\lambda \approx 400$. La ligne horizontale correspond à ce que l'on attend en supposant des loi d'échelles K41.

Quelques mots, finalement, sur le comportement des fonctions de structure pour des séparations aux échelles inertielles de la turbulence, c'est-à-dire pour $\eta \ll r \ll L$. Comme nous le voyons sur la Fig. 3.9(b), les fonctions de structure des particules tendent vers celles du fluide lorsque r devient très grand. En effet, lorsque r augmente, le temps de retournement associé croît comme $r^{2/3}$ (selon les propriétés d'échelle K41), de telle sorte que la force effective de l'inertie diminue avec l'échelle. De façon similaire à ce que nous avons vu pour les écoulements aléatoires dans les sections 1.2.1 et 3.2, cet effet peut être quantifié en termes du nombre de Stokes local $St(r) = \varepsilon^{1/3} \tau / r^{2/3}$ défini comme le rapport entre le temps de réponse des particules et le temps de retournement à l'échelle r . Nous avons pu vérifier que l'exposant local $\xi_p(r; \tau) \equiv (d \ln S_p(r; St)) / (d \ln r)$ ne dépend que de $St(r)$, comme nous l'avions vu dans la section 3.2.1. La figure 3.12 montre un bon chevauchement des données pour les valeurs de $\xi_1(r, \tau)$ associées à différents τ et r , une fois qu'elles sont représentées en fonction de $St(r)$. Les courbes $\xi_1(St(r))$ ont une forme qualitativement similaire à celle observée aux échelles dissipatives et représentée sur la Fig. 3.10(a). Comme nous le verrons dans le chapitre suivant, ceci a des implications sur la dispersion relative turbulentes de particules inertielles. Soulignons le fait que les données associées aux petits nombre de Stokes locaux sur la Fig. 3.12 montrent des déviations par rapport aux lois d'échelle K41 qui sont similaires à celles que l'on attend pour des traceurs.

Chapitre 4

Dispersion relative dans les suspensions turbulentes

Ce chapitre est dédié aux statistiques de l'évolution de la séparation entre deux particules, avec ou sans inertie, transportées par un écoulement turbulent. Il s'agit d'un problème important du fait de ses relations avec la question des fluctuations de concentration dans le mélange turbulent.

La section 4.1 porte sur le cas des traceurs en turbulence. La question de la dispersion relative reste en grande partie ouverte et a de nombreuses applications industrielles et atmosphérique. Aussi, elle a des liens avec des aspects fondamentaux de la turbulence à cause du comportement explosif observé pour la séparation des trajectoires lagrangiennes lié à la perte de régularité du champ de vitesse dans la limite des nombres de Reynolds infinis. Contrairement au problème de la dispersion d'une unique particule, qui est essentiellement déterminé par les tourbillons à grande échelle contenant l'essentiel de l'énergie cinétique de l'écoulement, la dispersion de paires dépend des fluctuations de la vitesse à des échelles de l'ordre de la séparation entre les particules. Ainsi, aussi bien initialement qu'à des temps de l'ordre de l'échelle intégrale, on s'attend à ce que le problème de la dispersion relative reflète la nature universelle de la turbulence aux petites échelles et le caractère intermittent de la cascade d'énergie. Ce dernier aspect se manifeste notamment par le fait que certaines paires de particules restent proches pendant des temps longs, tandis que d'autres se séparent très rapidement. Dans la sections 4.1, nous retraçons les travaux effectués sur la dispersion relative de traceurs [BHB12, BHB13].

La section 4.2 est consacrée au cas de particules avec de l'inertie. Un premier sujet auquel je me suis consacré concerne la dynamique relative aux échelles dissipatives de la turbulence, et donc aux exposants de Lyapunov et les fluctuations des taux d'étirement [BBB⁺06b]. Ces quantités caractérisent la dynamique relative de particules aux très petites échelles et jouent un rôle central pour déterminer la distribution de masse à ces échelles (voir section 1.1.1). La section 4.2.1 résume les travaux effectués en relation avec ces quantités. Pour des particules avec beaucoup d'inertie, un effet crucial qui a pu être mis en évidence est une réduction de chaoticité par rapport au cas de traceurs. En revanche, pour une inertie faible, le plus grand exposant de Lyapunov a une croissance contre-intuitive en fonction du nombre de Stokes. Aussi, nous avons observé que l'intermittence de l'écoulement turbulent a pour conséquence une dépendance en nombre de Reynolds des statistiques des taux d'étirement des traceurs (ou exposants de Lyapunov à temps finis). Cet effet a aussi été observé dans le cas d'une inertie non nulle.

Comme nous le verrons dans la section 4.2.2, j'ai étudié, en collaboration avec L. Biferale, A. Lanotte, A. Scagliarini et F. Toschi, la dispersion relative de particules lourdes aux échelles inertielles de la turbulence. Le but était de comprendre les corrections aux lois connues pour les traceurs qui sont dues à l'inertie des particules [BBL⁺10]. Aux temps courts, des différences de vitesse importantes entre particules tendent à prolonger la validité du régime dit de Batchelor pendant lequel les particules se séparent de façon quasi balistique. Cet effet est la signature de la présence de caustiques dans la distribution de particules, qui sont responsables de différences de vitesse élevées entre les particules. Pour les temps longs, il est possible d'utiliser une approche perturbative pour quantifier les déviations par rapport à Richardson en fonction du temps et de l'inertie des particules, et de montrer que les corrections sont proportionnelles au temps de réponse des particules, et inversement proportionnelles au temps.

4.1 Dispersion relative de traceurs dans un écoulement turbulent

Il est connu depuis les travaux maintenant classiques de Taylor [Tay21] que des traceurs transportés par un écoulement turbulent s'approchent d'un comportement diffusif sur des échelles bien plus grandes que le temps de corrélation lagrangien de la vitesse. Ces idées sont maintenant très largement utilisées dans les applications, comme par exemple pour le contrôle de la qualité de l'air, pour modéliser les propriétés de mélange effectives en termes d'une diffusivité turbulente. De tels modèles donnent une bonne approximation des moyennes à long terme et peuvent être utilisés avec succès pour déterminer par exemple les dangers possibles sur la santé d'une exposition prolongée en aval d'une source de polluant. Toutefois, de telles approches ne sont pas capables de prévoir les fluctuations locales fortes qui viennent de la complexité de l'écoulement turbulent (voir l'exemple de la Fig. 4.1). De tels événements ne peuvent pas être prédits à partir de la concentration moyenne vu qu'ils dépendent des moments d'ordres plus élevés. Il est crucial d'avoir accès à de telles fluctuations afin de pouvoir par exemple quantifier la possibilité de rencontrer des concentrations locales excédant un seuil élevé.

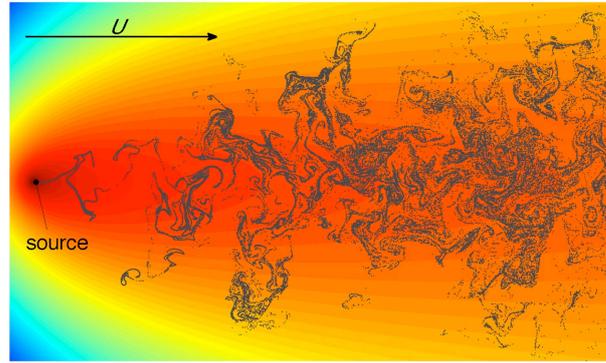


FIGURE 4.1 – Instantané de la position de traceur (points noirs) en aval d'une source d'où ils sont émis de façon continue. Leur distribution montre des régions de forte densité qui ne peuvent pas être prédites par l'approximation de diffusivité turbulente (montrée en couleur sur le fond). L'écoulement est ici bidimensionnel dans le régime de cascade inverse avec une vitesse moyenne U indiquée sur la figure.

Les statistiques du second ordre, comme par exemple la variance du champ de concentration transporté ou plus généralement les corrélations spatiales d'un scalaire passif, peuvent être statistiquement reliées au mouvement relatif des traceurs (voir, par exemple, [MY71]). Le problème consiste alors à étudier l'évolution temporelle de la séparation $\mathbf{R}(t) = \mathbf{X}_1(t) - \mathbf{X}_2(t)$ entre deux trajectoires lagrangiennes. En turbulence tridimensionnelle développée, la distance $|\mathbf{R}|$ suit la loi superdiffusive de Richardson–Obukhov $\langle |\mathbf{R}(t)|^2 \rangle \sim \varepsilon t^3$, avec ε le taux moyen de dissipation d'énergie cinétique. Le comportement aux temps longs devient alors indépendant de la séparation initiale $|\mathbf{R}(0)| = r_0$ et ce régime donne donc lieu à ce que l'on appelle une *séparation explosive* des paires de traceurs. Dans ses arguments originels pour obtenir cette loi, Richardson [Ric26] a fait l'hypothèse que la séparation entre les paires est un processus de diffusion avec un coefficient de diffusion K qui dépend de l'échelle. La densité de probabilité de transition $p(r, t | r_0, 0)$ que deux traceurs soient à une distance $|\mathbf{R}(t)| = r$, sachant qu'ils étaient initialement séparés de $|\mathbf{R}(0)| = r_0$, est alors une solution de l'équation de Fokker–Planck

$$\partial_t p = \frac{1}{r^2} \partial_r [r^2 K(r) \partial_r p]. \quad (4.1)$$

Les mesures atmosphériques de Richardson, reformulées plus tard par Obukhov [Obu41] avec le langage de la phénoménologie Kolmogorov 1941, conduisent à supposer que pour des séparations r aux échelles inertielles de la turbulence, on a $K(r) \propto \varepsilon^{1/3} r^{4/3}$. Ceci implique qu'aux temps longs, $\langle |\mathbf{R}(t)|^2 \rangle \propto \varepsilon t^3$ et que la probabilité de transition s'écrit

$$p(r, t | r_0, 0) \propto \frac{r^2}{\langle |\mathbf{R}(t)|^2 \rangle^{3/2}} \exp \left[-\frac{A r^{2/3}}{\langle |\mathbf{R}(t)|^2 \rangle^{1/3}} \right], \quad (4.2)$$

où A est une constante positive. Les considérations conduisant à l'équation de Fokker–Planck (4.1) reposent sur l'utilisation du théorème de la limite centrale pour $\mathbf{R}(t)$, et donc sur l'hypothèse que la différence de vitesse entre deux traceurs est corrélée sur des temps bien moins longs que ceux auxquels on observe leur séparation. Comme cela a été par exemple remarqué dans [FGV01], une telle hypothèse peut difficilement être invoquée. On sait en effet qu'en turbulence, les incréments de vitesse sur une

séparation r sont corrélés sur des temps de l'ordre de leur temps de retournement $\tau_r \sim \varepsilon^{-1/3} r^{2/3}$. Ainsi, pour des séparations qui croissent comme $r \sim \varepsilon^{1/2} t^{3/2}$, on a $\tau_r \sim t$, de telle sorte que les structures de l'écoulement qui dominent la dynamique relative des traceurs sont en principe corrélés sur des temps de l'ordre du temps d'observation. Malgré ces imprécisions sur ses origines physiques, l'approche diffusive de Richardson et en particulier la forme explicite (4.2) de la densité de probabilité de transition décrit assez bien les données dans certaines asymptotiques [OM00, BBC⁺05a, OXBB06, SC09, Eyi11]. Aussi, de nombreux travaux sur la dispersion relative ont eu comme fondement cette approche diffusive. Par exemple, des améliorations de (4.2) ont été proposées en utilisant des versions modifiées de la diffusivité turbulente $K(r)$ prenant aussi en compte une dépendance temporelle [Bat52, Kra66] ou, plus récemment, incluant des effets de nombre de Reynolds fini [SBT12]. Toutes ces améliorations altèrent fortement la forme fonctionnelle de la queue de probabilité aux grandes valeurs de r . Néanmoins, les mécanismes physiques conduisant à la décorrélation des différences de vitesse et aux modèles basés sur une diffusivité turbulente ne sont toujours pas clarifiés et de nombreuses questions restent ouvertes. Par exemple, la vitesse de convergence vers la loi de Richardson–Obukhov et la forme des termes sous-dominants restent inconnus.

Le premiers travaux portant sur la façon dont la séparation des traceurs converge vers un comportement superdiffusif sont dus à Batchelor [Bat50]. Il a argumenté que la loi explosive en t^3 est précédée d'une phase balistique pendant laquelle les traceurs gardent approximativement leurs vitesses initiales et se séparent linéairement en temps $R(t) - r_0 \simeq t \delta_{r_0} u \sim t(\varepsilon r_0)^{1/3}$, jusqu'à un temps $\tau_{r_0} \sim \varepsilon^{-1/3} r_0^{2/3}$ donné par le temps de retournement associé à leur séparation initiale. Ce premier régime, pendant lequel la vitesse reste fortement corrélée, ne peut clairement pas être décrit par une approche en termes de diffusivité turbulente. De nombreux modèles stochastiques ont ainsi été conçus pour capturer les deux régimes. La plupart d'entre eux est basée sur l'observation que les différences d'accélération entre les traceurs sont elles corrélées sur des temps courts. La séparation entre les traceurs et leur différence de vitesse peuvent alors être approchées par des processus diffusifs de Markov couplés (voir [Kur97, Saw01] pour des revues sur cette approche). La conception de tels modèles nécessite d'imposer des contraintes sur cette dynamique stochastique. Thomson [Tho87] a proposé qu'elle doit satisfaire une condition de « mélange complet » (well-mixing) : lorsque l'on moyenne sur une distribution de paires réparties de façon uniforme dans la gamme complète d'échelles inertielles, on doit retrouver les statistiques eulériennes des différences de vitesse. Cela impose que la conception d'un modèle admissible ait comme données d'entrée les statistiques eulériennes [BY04]. On sait qu'en turbulence la distribution des différences de vitesse n'est ni auto-similaire, ni gaussienne (voir, par exemple, [Fri95]). De tels modèles deviennent donc si compliqués qu'ils ne peuvent que difficilement être exploités pour comprendre la phénoménologie sous-jacente et encore moins être résolu de manière analytique.

Le but des travaux présentés dans les sous-sections suivantes est de donner une compréhension phénoménologique du problème de la dispersion relative turbulente. Pour cela, nous avons utilisé des simulations numériques directes pour explorer non seulement l'évolution moyenne de la séparation des particules, mais aussi les événements violents qui conduisent à des fluctuations fortes. Pour donner des pistes en vue de l'amélioration des modèles de dispersion relative, nous introduisons de nouvelles observables, mesurons leurs comportements et interprétons de manière phénoménologique les résultats.

4.1.1 Comportement explosif et échelles de temps

Pour déterminer les différentes échelles de temps qui interviennent dans la dispersion relative de traceurs, nous avons utilisé les données de simulations numériques directes des équations de Navier–Stokes incompressibles obtenues à l'aide du code pseudo-spectral en espace et Runge–Kutta du troisième ordre en temps *LaTu* développé par H. Homann. Nous avons utilisé deux configurations des simulations avec 2048^3 et 4096^3 points de grille correspondant respectivement à $R_\lambda \approx 460$ et $R_\lambda \approx 730$ (pour plus de détails, voir [GHP12]). Ces écoulements sont soutenus dans un état de turbulence développée statistiquement stationnaire en maintenant constants les contenus énergétiques des deux premières coquilles des modes de Fourier. La fonction de structure eulérienne obtenue à partir de ces deux simulations est représentée sur la Fig. 4.2. Comme on peut le voir, la plus grande résolution permet de commencer à voir des déviations à la loi d'échelle donnée par Kolmogorov 1941. Pour chacune des valeurs du nombre de Reynolds, l'écoulement estensemencé par 10^7 traceurs dont le mouvement est intégré par interpolation linéaire.

Après un temps suffisamment long pour avoir convergé vers un régime statistiquement stationnaire (autour d'un temps de retournement à grande échelle), nous commençons l'analyse de la dispersion relative de paires de traceurs. Nous définissons cet instant comme l'instant initial $t = 0$ et étiquetons toutes les paires dont la distance à cet instant, $|\mathbf{R}(0)| = |\mathbf{X}_1(0) - \mathbf{X}_2(0)|$, est égale à $r_0 \pm \eta$

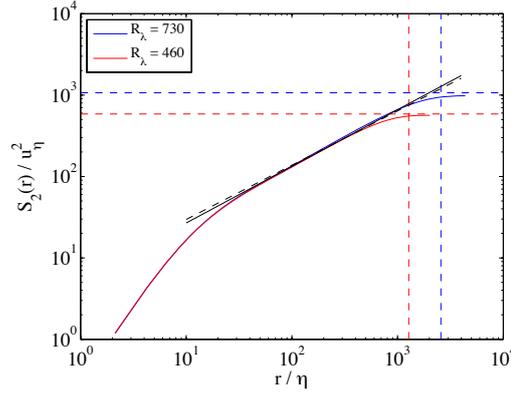


FIGURE 4.2 – Fonction de structure du second ordre $S_2(r) = \langle |u(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t) - u(\mathbf{x}, t)|^2 \rangle$ pour les deux valeurs du nombre de Reynolds étudiées dans cette section. La ligne pointillée représente la loi d'échelle donnée par la phénoménologie K41, à savoir $S_2(r) \simeq (11/3) C_2 (\varepsilon r)^{2/3}$ avec $C_2 = 2.13$. La ligne pleine correspond à la loi d'échelle anormale de She-Lévêque avec $\zeta_2 \approx 0.696$ (voir [SL94]). Les lignes verticales et horizontales colorées indiquent respectivement l'échelle intégrale L et la vitesse à grande échelle pour chacune des simulations.

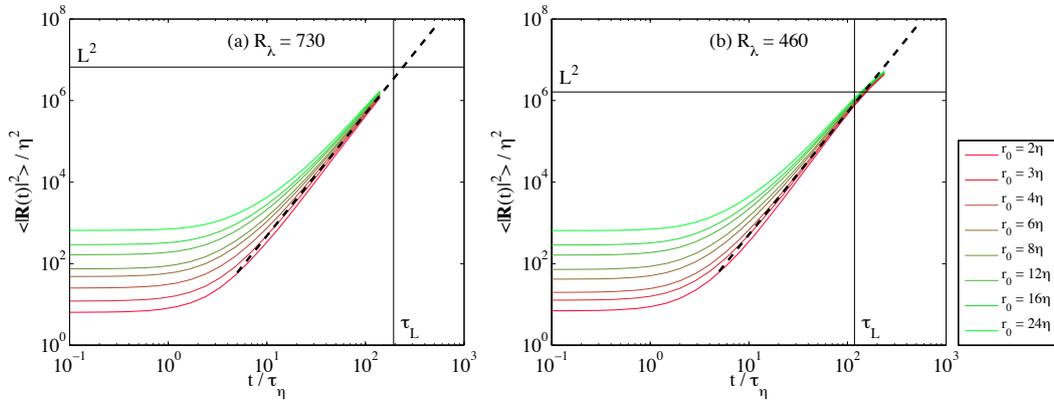


FIGURE 4.3 – Évolution temporelle de la distance carrée moyenne pour (a) $R_\lambda = 730$ et (b) $R_\lambda = 460$ et différentes séparations initiales r_0 . Les lignes horizontales et verticales montrent respectivement l'échelle intégrale L et le temps de retour τ_L qui lui est associé. La ligne en tirets correspond au régime explosif de Richardson–Obukhov $\langle |\mathbf{R}(t)|^2 \rangle \simeq g \varepsilon t^3$ avec $g = 0.52$.

pour $r_0 \leq 16\eta$ et $r_0(1 \pm 2\%)$ pour $r_0 > 16\eta$ avec $r_0 = 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32, 48, 64, 96, 128$, et 192η . Chaque famille de séparation initiale contient quelques centaines de milliers de paires. On suit alors dans le temps toutes les paires indécouplées et on effectue des statistiques conditionnées sur leur séparation initiale r_0 . La figure 4.3 montre, pour les deux simulations, l'évolution temporelle de la distance carrée moyenne $\langle |\mathbf{R}(t)|^2 \rangle$ pour différentes valeurs de r_0 . Les échelles d'espace et de temps sont là représentées en unités relatives aux échelles dissipatives. Après un régime transitoire, qui correspond grosso-modo au régime balistique de Batchelor, la distance carrée moyenne s'approche du régime explosif de Richardson–Obukhov $\langle |\mathbf{R}(t)|^2 \rangle \simeq g \varepsilon t^3$. On observe pour les deux valeurs du nombre de Reynolds, la valeur numérique $g \approx 0.52 \pm 0.05$ pour la constante de Richardson. L'idée est d'essayer de caractériser les échelles de temps de convergence vers ce régime.

Commençons par essayer de comprendre à quel instant ont lieu les déviations au régime balistique de Batchelor. Pour cela, on suit les mêmes idées que dans [OXBB06] et on écrit un développement de Taylor aux temps courts de la séparation :

$$\langle |\mathbf{R}(t) - \mathbf{R}(0)|^2 \rangle_{r_0} = t^2 \langle |\delta_{r_0} \mathbf{u}|^2 \rangle + t^3 \langle \delta_{r_0} \mathbf{u} \cdot \delta_{r_0} \mathbf{a} \rangle + O(t^4). \quad (4.3)$$

Ici, $\langle \cdot \rangle_{r_0}$ dénote la moyenne sur l'ensemble des paires qui sont initialement à une distance r_0 . Cette notation est utile pour faire la distinction entre les moyennes lagrangiennes et eulériennes, ces dernières étant écrites comme $\langle \cdot \rangle$. La quantité $\delta_r \mathbf{a}$ est l'incrément eulérien de l'accélération du fluide défini comme $\delta_r \mathbf{a} = [\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}](\mathbf{x} + \mathbf{r}, t) - [\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}](\mathbf{x}, t)$. Tant que le terme proportionnel à t^2 est dominant, les traceurs se séparent de façon balistique. Il est clair que le développement ne converge plus et donc que le régime balistique ne peut persister au delà de l'instant où le terme sous-dominant en t^3 du membre de droite de (4.3) devient du même ordre que le terme en t^2 . Cela se produit lorsque

$$t \gtrsim t_0 = \frac{S_2(r_0)}{|\langle \delta_{r_0} \mathbf{u} \cdot \delta_{r_0} \mathbf{a} \rangle|}, \quad \text{où } S_2(r_0) = \langle |\delta_{r_0} \mathbf{u}|^2 \rangle. \quad (4.4)$$

On sait que dans un écoulement turbulent et pour des séparations aux échelles inertielles, la corrélation entre les incréments de vitesse et ceux de l'accélération peut s'exprimer en termes du taux moyen de dissipation d'énergie cinétique [OM00, FGV01], à savoir

$$\langle \delta_{r_0} \mathbf{u} \cdot \delta_{r_0} \mathbf{a} \rangle \simeq -2\varepsilon. \quad (4.5)$$

Cette relation est exacte et ne se base pas sur la phénoménologie K41 ; elle peut être vue comme une version lagrangienne de la loi des 4/5. Elle implique que pour des séparations initiales r_0 aux échelles inertielles, le régime balistique doit se terminer à des temps plus courts ou de l'ordre de

$$t_0 \simeq \frac{S_2(r_0)}{2\varepsilon}. \quad (4.6)$$

Cette échelle de temps peut être interprétée comme le temps nécessaire pour dissiper l'énergie initialement contenue à l'échelle r_0 avec le taux moyen ε . On s'attend à ce que ce temps soit de l'ordre du temps de corrélation de la différence de vitesse initiale entre les traceurs. La définition de cette échelle de temps est différente de celle du temps de retournement $\tau_{r_0} = r_0 / \sqrt{S_2(r_0)}$ associé à l'échelle r_0 . Bien sûr, lorsque l'on suppose que les lois d'échelle K41 s'appliquent, t_0 et τ_{r_0} ont la même dépendance en r_0 . Toutefois, en utilisant les estimations standards de la constante de Kolmogorov C_2 , on obtient que leur rapport est environ égal à 11. Aussi, les corrections intermittentes au comportement de $S_2(r_0)$ font que ce rapport dépend en principe de l'échelle. En effet, si on suppose que $S_2(r_0) \propto (\varepsilon r_0)^{2/3} (r_0/L)^{\zeta_2 - 2/3}$, on obtient $t_0/\tau_{r_0} \propto (r_0/L)^{(3/2)\zeta_2 - 1}$. Vu que $\zeta_2 > 2/3$, le rapport entre le temps de « temps de dissipation » t_0 et le temps de retournement augmente avec l'échelle r_0 (voir Fig. 4.4(a)).

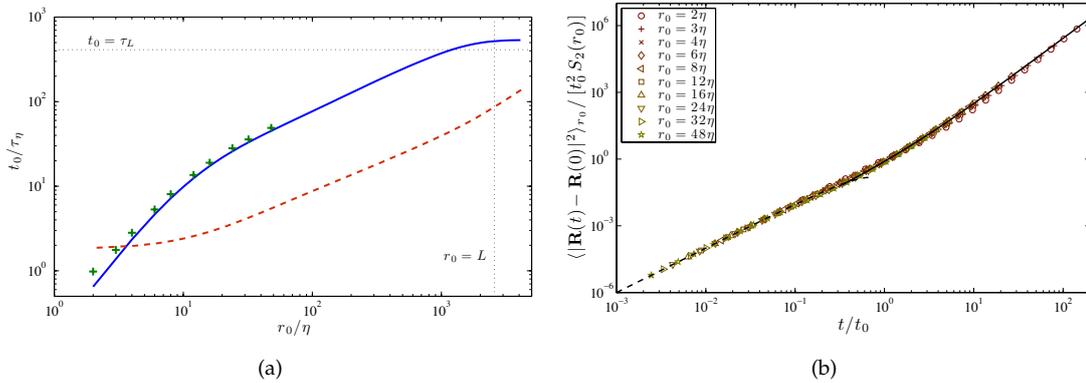


FIGURE 4.4 – (a) Temps de dissipation t_0 en fonction de r_0 en unité des échelles dissipatives pour $R_\lambda = 730$. La ligne bleue est obtenue à partir de mesures eulériennes tandis que les symboles + verts sont les mesures lagrangiennes associées aux bins utilisés pour la séparation relative. La ligne rouge montre le temps de retournement $\tau(r_0) = r_0/[S_2(r_0)]^{1/2}$. (b) Séparations carrées moyennes entre deux trajectoires de traceurs pour $R_\lambda = 730$ et différentes séparations initiales r_0 . La ligne en tirets représentent les deux termes dominants du régime balistique (4.7). La ligne continue représente le régime de Richardson–Obukhov (4.8) avec $g = 0.525$ et $C = 2.5$.

Pour en revenir à nos calculs des termes sous-dominants dans le régime balistique, on introduit dans (4.3) l'échelle temporelle t_0 . Pour des temps t bien plus petits que t_0 , on peut alors écrire

$$\langle |\mathbf{R}(t) - \mathbf{R}(0)|^2 \rangle_{r_0} = t_0^2 S_2(r_0) \left[\frac{t}{t_0} \right]^2 \left[1 - \frac{t}{t_0} \right] + o((t/t_0)^2), \quad (4.7)$$

La figure 4.4(b) représente l'évolution temporelle du déplacement carré moyen pour différentes valeurs de la distance initiale r_0 . Sauf spécifiquement indiqué, les figures dans la suite de cette section se réfèrent dorénavant au cas $R_\lambda = 730$. On voit clairement qu'une fois le temps adimensionné par t_0 et les distances carrées par $t_0^2 S_2(r_0)$, toutes les mesures se superposent les unes aux autres lorsque r_0 prend des valeurs dans la gamme d'échelle inertielle. Aussi, les données sont en bon accord avec les corrections au régime balistique prédites dans (4.7).

Il est important de noter que le chevauchement des données de la Fig. 4.4(b) s'étend aux temps plus grands que t_0 pour lesquels la séparation carrée moyenne tend vers le régime de Richardson–Obukhov en t^3 regime. Cette observation inattendue implique que t_0 n'est pas seulement l'échelle de temps des déviations au régime balistique mais aussi celle de la convergence vers la loi de Richardson. En particulier, les données suggèrent que le comportement aux temps longs ($t \gg t_0$) prend la forme

$$\langle |\mathbf{R}(t) - \mathbf{R}(0)|^2 \rangle_{r_0} = g \varepsilon t^3 \left[1 + C \frac{t_0}{t} \right] + o((t_0/t)^2) \quad (4.8)$$

la constante C qui apparaît là ne dépend que faiblement du nombre de Reynolds. Ceci peut être vu sur la Fig. 4.5(a), qui représente le graphe compensé de l'augmentation carrée de la distance $\langle |\mathbf{R}(t) - \mathbf{R}(0)|^2 \rangle / (\varepsilon t^3)$ pour les deux valeurs du nombre de Reynolds que nous avons étudiées. Dans cette figure, le temps est de nouveau redimensionné par $t_0 = S_2(r_0)/(2\varepsilon)$. Les données confirment que les termes sous-dominants dans le régime explosif sont $\propto t^2$, comme cela a été postulé dans (4.8). On observe aussi que la constante C est indépendante de r_0 lorsque $r_0 \gg \eta$. Il est important de préciser que les termes sous-dominants en t^2 qui apparaissent aux temps longs sont clairement différents de ceux provenant du régime balistique. La ligne pointillée représente ces derniers et on voit qu'ils donnent une bonne approximation de la courbe jusqu'à quelques centièmes de t_0 . Au contraire, la ligne en tirets qui correspond à la forme (4.8) que nous proposons avec $C \approx 2.5$ n'est valide que pour $t \gg t_0$. Des mesures systématiques de la constante C en fonction des séparations initiales ont été effectuées et

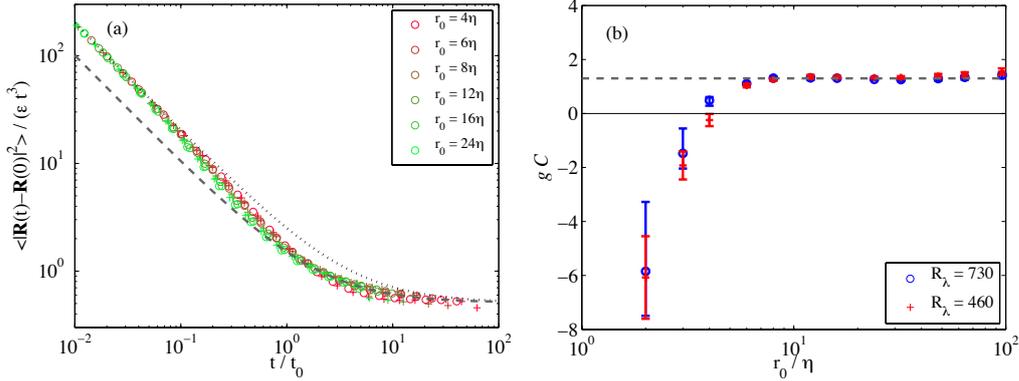


FIGURE 4.5 – (a) Déplacement carré moyen $\langle |\mathbf{R}(t) - \mathbf{R}(0)|^2 \rangle / (\varepsilon t^3)$, compensé par son comportement aux temps longs, en fonction de t/t_0 pour différentes séparations initiales. Les valeurs du nombre de Reynolds sont $R_\lambda = 730$ (\circ) et $R_\lambda = 460$ ($+$). Les deux courbes montrent des comportements de la forme $\langle |\mathbf{R}(t) - \mathbf{R}(0)|^2 \rangle \simeq g \varepsilon t^3 + A t^2$, avec soit $A = S_2(r_0)$ donné par le régime de Batchelor (ligne noire pointillée), soit $A = 2.5 g / t_0^2$ (ligne en tirets gris). (b) Valeur estimée de la constante gC devant les termes sous-dominants en fonction de la séparation initiale. Elle se stabilise vers $C \approx 1.3/g \approx 2.5$ pour $r_0 \gg \eta$; cette valeur est représentée par une ligne horizontale.

sont représentées sur la Fig. 4.5(b). Ceci a été fait en estimant numériquement le produit de g et C à partir du déplacement carré moyen compensé. Nous trouvons que $C < 0$ lorsque r_0 est de l'ordre de l'échelle de Kolmogorov η . Dans ce cas, la convergence vers le régime de Richardson–Obukhov se fait par en dessous et il est contaminé par les paires de traceurs qui passent des temps longs à des petites séparations avant d'échantillonner les échelles inertielles. Ceci est en accord avec les observations faites dans [SBT12]. La convergence vers la loi de Richardson–Obukhov par en dessous pour ces petites valeurs de r_0 conduit à une asymptotique intermédiaire en temps où la distance carrée moyenne entre les traceurs croît encore plus rapidement que le régime explosif en t^3 , comme observé par exemple dans [BBC⁺05a]. Lorsque r_0 est suffisamment loin dans la gamme d'échelles inertielles ($r_0 \gtrsim 8\eta$), on trouve que $C \approx 1.3/g \approx 2.5$ devient indépendante de la séparation initiale, et qu'au contraire des r_0 plus petits, la convergence vers la loi de Richardson se fait par le dessus. On observe aussi que pour des séparations initiales r_0 de l'ordre de 4η , on a $C = 0$, indépendamment du nombre de Reynolds. Les seuls termes sous-dominants dans (4.8) sont donc d'ordre moins élevé (c'est-à-dire $\propto t$ au lieu de t^2). En conséquence, la séparation carrée moyenne converge bien plus rapidement vers le régime en t^3 . Ceci suggère que la séparation initiale $r_0 \approx 4\eta$ pourrait être un choix optimal pour observer la loi de Richardson–Obukhov dans les expériences. Toutefois, des valeurs aussi faibles de r_0 ne sont pas représentatives du comportement aux échelles inertielles. On peut finalement noter que sur la Fig. 4.5(b), les valeurs de la constante C obtenues pour les deux valeurs de R_λ diffèrent pour r_0 autour de 4η alors qu'elles se chevauchent pour r_0 plus grand. Ceci est certainement dû au fait que la forme que nous avons utilisée pour approcher les données cesse là d'être une bonne représentation des données. Une meilleure estimation de C nécessiterait de prendre en compte les termes sous-dominants.

4.1.2 Statistiques des différences de vitesse

Nous nous intéressons maintenant aux statistiques de la différence de vitesse $\mathbf{V}(t) = \mathbf{u}(X_1(t), t) - \mathbf{u}(X_2(t), t)$ entre les deux traceurs. La loi de Richardson en t^3 pour les distances entre les traceurs implique que la différence de vitesse carrée moyenne se comporte aux temps longs comme

$$\langle |\mathbf{V}(t)|^2 \rangle_{r_0} \simeq h \varepsilon t, \quad (4.9)$$

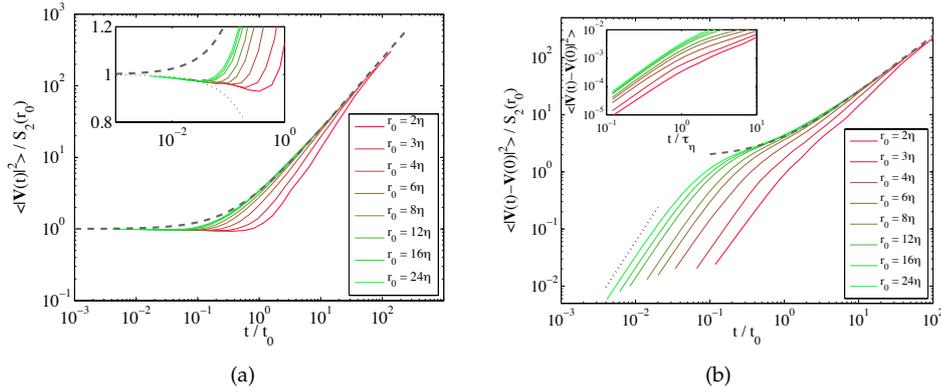


FIGURE 4.6 – (a) Évolution temporelle de la différence de vitesse carrée moyenne $\langle |\mathbf{V}(t)|^2 \rangle_{r_0}$, normalisée par sa valeur initiale, pour $R_\lambda = 730$. La ligne en tirets représente le comportement (4.9) avec $h = 2.4$. Encart : idem pour les temps courts ; la ligne noire pointillée est associée à la décroissance initiale due à la dissipation d'énergie $\langle |\mathbf{V}(t)|^2 \rangle_{r_0} \simeq S_2(r_0) - 4\epsilon t$. (b) Incrément de la différence de vitesse $\langle |\mathbf{V}(t) - \mathbf{V}(0)|^2 \rangle_{r_0}$; la courbe en tirets correspond à $\langle |\mathbf{V}(t) - \mathbf{V}(0)|^2 \rangle_{r_0} \simeq S_2(r_0) + h\epsilon t$; la ligne en pointillés a une pente 2 et correspond à la variation initiale abrupte de la vitesse relative. Encart : idem avec le temps normalisé cette fois par τ_η .

où h est une constante positive qui ne peut pas être directement déduite de la constante de Richardson g . Un comportement $\propto t$ du carré moyen d'une quantité est une propriété clef des processus purement diffusifs. Comme nous allons le voir par la suite, la différence de vitesse entre les traceurs peut effectivement s'interpréter par certains aspects comme une diffusion. Commençons par résumer les observations qui peuvent être faites sur ses statistiques à partir des simulations numériques.

Initialement, les statistiques de $\mathbf{V}(0)$ sont exactement données par les statistiques eulériennes des incréments de vitesse sur une séparation r_0 . Nous avons notamment utilisé cela pour obtenir l'expression (4.3). Aux temps longs, on s'attend à ce que le comportement des différences de vitesse soit donné par (4.9). Une approche naïve consiste à interpoler entre ces deux comportements et à supposer que

$$\langle |\mathbf{V}(t)|^2 \rangle_{r_0} \simeq S_2(r_0) + h\epsilon t. \quad (4.10)$$

En faisant l'hypothèse d'une telle forme, on peut s'attendre à ce que l'un de deux régimes soit dominant selon que t soit plus petit ou plus grand que t_0 . Comme on le voit sur la Fig. 4.6(a), une telle forme avec $h = 2.4$ (représentée par une courbe en tirets) semble être au premier ordre une assez bonne approximation. Toutefois, cette vision n'est pas tout à fait satisfaisante. Lorsque l'on effectue un zoom aux temps plus petits (voir encart), on observe que l'énergie cinétique moyenne des paires $\langle |\mathbf{V}(t)|^2 \rangle_{r_0}$ commence tout d'abord par décroître pendant des temps de l'ordre d'un dixième de t_0 . On sait effectivement qu'initialement

$$\mathbf{V}(t) = \mathbf{V}(0) + t\mathbf{A}(0) + o(t^2), \quad (4.11)$$

où $\mathbf{A}(0) = (\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u})(\mathbf{X}_1(0), 0) - (\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u})(\mathbf{X}_2(0), 0)$ est la différence initiale d'accélération entre les deux traceurs. L'approximation conduit donc à

$$\langle |\mathbf{V}(t)|^2 \rangle_{r_0} \simeq S_2(r_0) - 4\epsilon t + o((t/t_0)^2), \quad (4.12)$$

Selon nos données numériques, ce régime semble reproduire de manière satisfaisante ce qui se passe aux temps courts (voir l'encart de la Fig. 4.6(a)). Le fait que cette prédiction cesse de décrire les données après des temps relativement courts comparés à t_0 indique que les termes sous-dominant dans (4.11) deviennent importants. En conséquence, selon la quantité à laquelle on s'intéresse, le régime balistique de Batchelor peut se terminer assez rapidement.

Après cette décroissance initiale subtile, la différence de vitesse carrée moyenne tend asymptotiquement vers un comportement $\propto t$. Toutefois, ce processus se passe d'une manière assez différente de la convergence des carrés de la séparation vers la loi de Richardson en t^3 : quelle que soit la séparation initiale, la quantité $\langle |\mathbf{V}(t)|^2 \rangle_{r_0}$ s'approche toujours du comportement asymptotique par en dessous. En d'autres termes, on observe que pour une valeur fixée de t/t_0 , l'énergie cinétique moyenne $\langle |\mathbf{V}(t)|^2 \rangle_{r_0}$ des paires est une fonction croissante de r_0/η et semble converger vers le comportement (4.9) seulement dans la limite $r_0/\eta \rightarrow \infty$.

Aux temps longs, la différence de vitesse carrée moyenne croît linéairement. Ce comportement suggère que les différences de vitesse ont un comportement diffusif pour $t \gg \tau_\eta$. Nous reviendrons plus tard sur les arguments qui appuient cette observation. Si cela était exact, on aurait par conséquence le

comportement (4.10) vu que les incréments temporels de \mathbf{V} seraient indépendants de sa valeur initiale. Aussi, un comportement purement diffusif de \mathbf{V} résulterait dans le fait que l'incrément spatio-temporel carré moyen $\langle |\mathbf{V}(t) - \mathbf{V}(0)|^2 \rangle_{r_0}$ serait $\propto t$ pour tous les temps $t \gg \tau_\eta$. Comme on le voit dans Fig. 4.6(b), ce n'est clairement pas le cas. Les données montrent en fait que $\mathbf{V}(t)$ varie initialement sur des temps de l'ordre de τ_η par un facteur de l'ordre de sa valeur initiale $[S_2(r_0)]^{1/2}$. Cette évolution abrupte peut être interprétée de manière phénoménologique. Avec une probabilité finie, l'un des deux traceurs peut se trouver à l'intérieur d'un filament de vorticité à l'instant initial. L'énergie typique contenue dans ce filament va contribuer à la valeur de $S_2(r_0)$. Toutefois, après un temps t de l'ordre de τ_η , la trajectoire de ce traceur aura tourné autour de ce filament, de telle sorte que sa vitesse aura complètement changé d'orientation (sans avoir vraiment changé d'amplitude). Cela resultera en $|\mathbf{V}(t) - \mathbf{V}(0)| \sim |\mathbf{V}(t)|$, ce qui explique le comportement observé. Une conséquence de ces variations cinématiques abruptes de la différence de vitesse est que $\langle |\mathbf{V}(t) - \mathbf{V}(0)|^2 \rangle_{r_0}$ se comporte d'une façon très similaire à $\langle |\mathbf{V}(t)|^2 \rangle_{r_0}$ pour des temps de l'ordre de $t \gg \tau_\eta$ (comparer pour cela les courbes en tirets sur la Fig. 4.6(a) et la Fig. 4.6(b)). Notons aussi que la convergence vers ce comportement est par en dessous, quelle que soit la séparation initiale.

Il y a donc un changement abrupt qui a lieu sur des échelles temporelles de l'ordre de τ_η qui empêche de déterminer la différence de vitesse initiale effective et d'observer un comportement diffusif clair pour $\mathbf{V}(t)$. Toutefois les données suggèrent que l'échelle de temps de convergence vers ce comportement est de nouveau de l'ordre de t_0 , comme pour la convergence des séparations vers la loi en t^3 . Pour comprendre de façon plus précise cette question, on passe maintenant à l'étude de l'évolution de la différence de vitesse longitudinale entre les traceurs $V^\parallel(t) = \mathbf{R}(t) \cdot \mathbf{V}(t) / |\mathbf{R}(t)|$. Cette quantité est importante pour caractériser la séparation des paires puisque $d|\mathbf{R}|/dt = V^\parallel$. Initialement, la valeur moyenne de la différence de vitesse longitudinale s'annule : $\langle V^\parallel(0) \rangle = 0$; ceci est dû à la stationnarité statistique de l'écoulement du fluide. Pour des temps $t \ll t_0$ dans le régime de Batchelor, les paires gardent leur différence de vitesse initiale et on peut aisément vérifier que

$$\langle V^\parallel(t) \rangle \simeq t \langle |\mathbf{V}^\perp(t)|^2 \rangle / r_0, \quad (4.13)$$

où \mathbf{V}^\perp désigne les composantes de \mathbf{V} transverses à \mathbf{R} . Il est donc clair que la valeur moyenne de la différence de vitesse longitudinale devient immédiatement positive. La figure 4.7(a), qui représente l'évolution temporelle de $\langle V^\parallel(t) \rangle$, montre sans aucun doute cette croissance initiale linéaire en temps. Cette croissance de la différence de vitesse longitudinale a une interprétation géométrique intéressante.

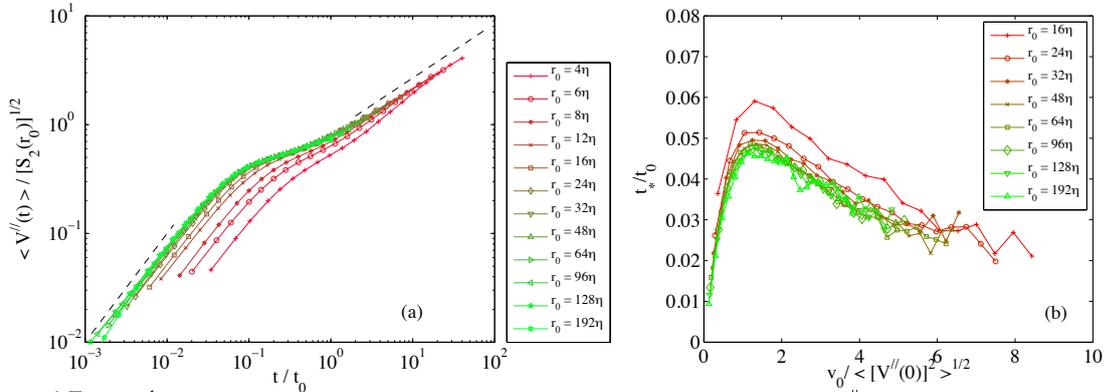


FIGURE 4.7 – (a)   volution temporelle de la différence de vitesse longitudinale moyenne $\langle V^\parallel(t) \rangle$ pour différentes séparations initiales et $R_\lambda = 730$. (b) Temps moyen $t_* = -r_0 v_0 / \langle |\mathbf{V}^\parallel(0)|^2 | V^\parallel(0) = v_0 \rangle$ que mettent les trajectoires avec une différence de vitesse longitudinale initiale v_0 négative pour atteindre leur séparation minimale.

Si toutes les paires maintenaient indéfiniment leur différence de vitesse initiale $\mathbf{V}(0)$, il est clair qu'elles finiraient toutes par se séparer aux temps suffisamment longs. En effet, elles atteindraient une distance minimale à un temps fini $t_* = -[\mathbf{R}(0) \cdot \mathbf{V}(0)] / |\mathbf{V}(0)|^2 = -r_0 V^\parallel(0) / |\mathbf{V}(0)|^2$, qui est positif pour les paires de traceurs qui se rapprochent initialement. Après l'instant t_* , la distance entre les traceurs croît et V^\parallel devient positif. Cela conduit à une croissance de $\langle V^\parallel \rangle$ venant de considérations purement cinématiques et qui n'est trivialement pas due à la dynamique imposée par l'écoulement turbulent. Pour estimer la valeur typique de la distance minimale à l'instant t_* , nous avons effectué des statistiques conditionnées non seulement sur la séparation initiale r_0 , mais aussi sur la différence de vitesse longitudinale en choisissant les paires telles que $V^\parallel(0) = v_0 \pm \delta v_0$.    partir de ces statistiques, nous avons défini le temps moyen $t_* = -r_0 v_0 / \langle |\mathbf{V}^\parallel(0)|^2 | v_0 \rangle$ auquel les trajectoires avec une valeur de v_0 fixée sont estimées être à une distance minimale. Les données sont représentées sur la Fig. 4.7(b) pour différentes valeurs de

r_0 et en fonction de v_0 . On observe que pour $r_0 \gg \eta$ ce temps prend approximativement la forme $t_* \simeq t_0 f(v_0 / \langle |V(0)|^2 \rangle^{1/2})$, où la fonction $f(x)$ atteint son minimum (à peu près égal à 0.05) pour $x \approx 1$. Ceci confirme l'observation faite sur la Fig. 4.7(a) que la croissance initiale de $\langle V^\parallel \rangle$ se passe sur un temps de l'ordre de quelques centièmes de t_0 .

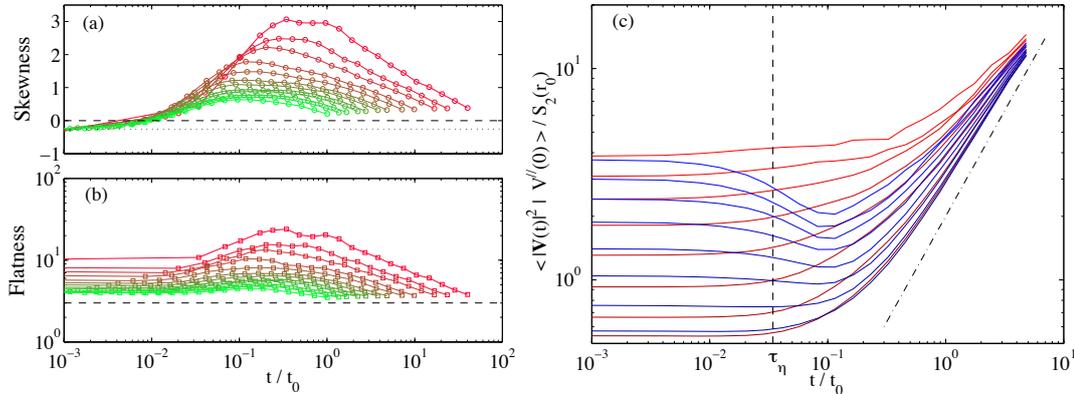


FIGURE 4.8 – Évolutions temporelles de (a) le coefficient d'asymétrie $\mathcal{S}(t)$ et (b) d'aplatissement $\mathcal{F}(t)$ définis dans (4.14) pour les mêmes séparations initiales r_0 que sur la Fig. 4.7(a). Les lignes horizontales en tirets correspondent à une distribution gaussienne : $\mathcal{S} = 0$ et $\mathcal{F} = 3$. La ligne pointillée sur (a) est la valeur initiale $\mathcal{S} = (4/5)/C_2^{3/2}$ obtenue lorsque l'on suppose les propriétés d'échelle K41. (c) Évolution temporelle pour $r_0 = 24\eta$ de la différence de vitesse carrée moyenne conditionnée sur $V^\parallel(0) = v_0$ avec $|v_0| / \langle |V^\parallel(0)|^2 \rangle^{1/2} = 0.1, 0.4, 0.8, 1.2, \dots, 2.8$. Les courbes rouges correspondent aux valeurs positives de v_0 et les bleues aux valeurs négatives. La ligne pointillée est $\propto t$.

En plus du changement de signe de la valeur moyenne, les mesures numériques montrent que la distribution de probabilité de V^\parallel perd sa symétrie et développe des queues de plus en plus larges lorsque le temps augmente. Les figures 4.8(a) et (b) représentent l'asymétrie \mathcal{S} (skewness) et l'aplatissement \mathcal{F} (flatness) de V^\parallel en fonction du temps. Ces observables sont souvent utilisées en turbulence pour quantifier la forme de la distribution des incréments longitudinaux eulériens de la vitesse. Pour les statistiques lagrangiennes à deux particules, elles sont définies par

$$\mathcal{S}(t) = \frac{\langle [V^\parallel(t) - \langle V^\parallel(t) \rangle]^3 \rangle}{\langle [V^\parallel(t) - \langle V^\parallel(t) \rangle]^2 \rangle^{3/2}} \quad \text{et} \quad \mathcal{F}(t) = \frac{\langle [V^\parallel(t) - \langle V^\parallel(t) \rangle]^4 \rangle}{\langle [V^\parallel(t) - \langle V^\parallel(t) \rangle]^2 \rangle^2}. \quad (4.14)$$

Comme déjà observé par exemple dans [YB04], ces quantités varient fortement en temps et gardent une dépendance marquée en la séparation initiale r_0 pour des temps relativement longs. La figure 4.8(a) montre que le coefficient d'asymétrie de $V^\parallel(t)$ commence initialement à des valeurs négatives (en accord avec la loi des 4/5 eulérienne) et devient positif aux temps plus grands que $\approx 0.01 t_0$. Ce changement de signe initial peut également s'interpréter géométriquement en termes du temps t_* que mettent les paires qui se rapproche initialement de façon balistique pour s'éloigner. Toutefois, après cela, les courbes se séparent les unes des autres et atteignent un maximum à des temps de l'ordre ou à peine plus courts que t_0 . Cette valeur maximale dépend fortement de la séparation initiale. Après, l'asymétrie diminue sans atteindre de régime asymptotique indépendant de r_0 . Ceci pourrait être dû soit à une mémoire persistante en r_0 , soit à des effets de nombre de Reynolds (ou de taille) fini. Le même type de comportement est observé pour le coefficient d'aplatissement \mathcal{F} , comme on le voit sur la Fig. 4.8(b). Toutefois, la dépendance de la valeur maximale en r_0 est encore plus marquée. Une autre différence notable est que la valeur initiale de \mathcal{F} dépend fortement de r_0 en relation avec sa valeur eulérienne.

La forte dépendance en r_0 de \mathcal{S} et \mathcal{F} peut s'interpréter de manière phénoménologique. Une valeur positive grande de \mathcal{S} correspond à une probabilité grande que les paires se séparent plus vite que la moyenne. De tels événements sont aussi responsables d'une grande valeur de \mathcal{F} . Aussi, les particules qui se séparent le plus vite ont clairement des chances d'être celles qui sont le plus séparées. En turbulence, la valeur typique des incréments de vitesse augmente avec l'échelle, de sorte que les traceurs qui se sont séparés rapidement dès le début ont des chances de continuer à se séparer plus rapidement que la moyenne aux temps ultérieurs. Ceci est clair sur la Fig. 4.8(c) qui représente l'évolution temporelle de la différence de vitesse carrée moyenne conditionnée sur la valeur initiale de la différence de vitesse longitudinale pour $r_0 = 24\eta$. On observe que jusqu'au temps le plus grand (de l'ordre de $5 t_0$), il y a toujours une mémoire apparente dans la valeur initiale de V^\parallel . On remarque aussi que les paires qui ont les plus grandes différences de vitesse longitudinale négative (les courbes bleues) dissipent bien plus d'énergie cinétique que les autres. Toutefois, ceci ne les empêche pas de se séparer aux temps longs plus

rapidement que les paires qui avaient initialement une différence de vitesse moins marquée. Pour en revenir à l'explication de l'effet mémoire à long terme de l'asymétrie et l'aplatissement de V^{\parallel} , rappelons nous qu'en turbulence, les différences de vitesse atypiquement violentes sont plus probables aux petites échelles. Ceci implique que les paires avec une petite séparation initiale sont plus amène de rencontrer des fluctuations violentes de leur différence de vitesse initiale. Cela fait qu'elles se séparent plus vite que la moyenne et rencontrent ainsi des fluctuations de vitesse encore plus grandes. Cet accroissement rapide est ainsi dû à une sorte d'effet boule de neige. Nous essaierons par la suite de quantifier ce phénomène avec plus de précision.

Toutes ces considérations sont confirmées dans la distribution de la différence de vitesse longitudinale. La figure 4.9(a) montre la densité de probabilité de V^{\parallel} centrée et normalisée à une variance unité pour différents temps et $r_0 = 12\eta$. Les données montrent nettement qu'à des temps plus grands que $0.01 t_0$, il y a un changement dans l'asymétrie de la distribution. Aussi, on observe que la dépendance temporelle de l'asymétrie et de l'aplatissement proviennent de l'élargissement de la queue associée aux grandes valeurs positives. Les queues gauches, qui correspondent à des particules qui s'approchent, semblent au contraire assez vite se chevaucher. La queue droite commence elle par s'élargir aux temps $t < t_0$, en accord avec le comportement du coefficient d'aplatissement. Aux temps $t > t_0$, elle décroît ensuite pour se rapprocher éventuellement de sa forme initiale. Cela pourrait indiquer de nouveau un effet de mémoire de la séparation initiale. Cette tendance est aussi observable sur la Fig. 4.9(b), qui

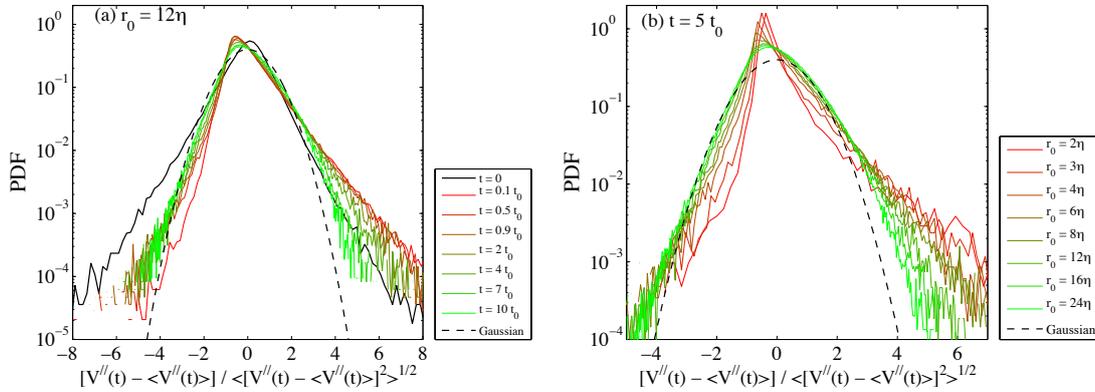


FIGURE 4.9 – Densités de probabilité centrées et normalisées à une variance unité des différences de vitesse longitudinales pour (a) $r_0 = 12\eta$ et différents instants et (b) différentes séparations initiales et $t = 5 t_0$. Les lignes en tirets noirs représentent la distribution normale.

représente les mêmes distributions mais cette fois-ci pour différentes séparations initiales et pour un temps $t = 5 t_0$ fixé. On observe de nouveau une assez faible dépendance de la queue gauche en fonction de r_0 mais en revanche des comportements très différents pour les queues droites. Le comportement ressemble à une exponentielle étirée pour $r_0 \lesssim 8\eta$ et a une décroissance plus rapide qu'une exponentielle pour les séparations initiales plus grande. Le niveau actuel des statistiques ne permet pas de relier ce comportement à celui de la distribution initiale des différences de vitesse.

Pour finir, une autre façon de regarder l'intermittence de la distribution de vitesse longitudinale consiste à mesurer comment ses moments dépendent du temps. Pour cela, on suit une approche similaire à celle utilisée dans la section 2.1.2 du chapitre précédent basée sur la notion d'« extended self similarity ». Les figures 4.10(a) et (b) représentent les moments d'ordres quatre et six de $V^{\parallel}(t)$ en fonction du moment d'ordre deux. Comme cela est mis en évidence dans les encarts, elles montrent un comportement anomal différent de ce que l'on pourrait prédire par analyse dimensionnelle. Toutefois, les déviations ne sont claires qu'aux temps ou aux séparations initiales suffisamment grands. On peut alors discerner un comportement en loi de puissance de $\langle [V^{\parallel}(t)]^p \rangle$ en fonction de $\langle [V^{\parallel}(t)]^2 \rangle$. De façon surprenante, l'exposant mesuré est compatible avec ceux des fonctions de structure lagrangiennes obtenus dans [BBC⁺04] en reliant les incréments temporels de la vitesse le long des trajectoires au spectre multifractal du champ eulérien. Confirmer cette observation nécessite des statistiques plus importantes.

4.1.3 Géométrie, intermittence et événements violents

Nous avons vu dans la section 4.1.1 que le déplacement carré moyen $\langle |\mathbf{R}(t) - \mathbf{R}(0)|^2 \rangle_{r_0}$ entre deux traceurs initialement à une distance $|\mathbf{R}(0)| = r_0$, se comporte de façon balistique comme t^2 aux temps court et entre dans un régime explosif $\propto t^3$ aux temps longs. La transition entre ces deux lois a lieu au temps $t_0 = S_2(r_0)/(2\varepsilon)$. Nous nous intéressons ici au comportement au temps long des

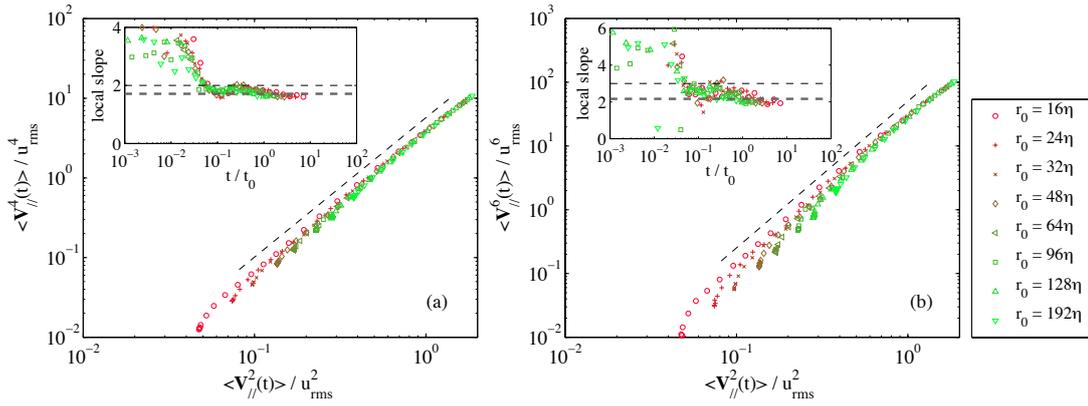


FIGURE 4.10 – Moments de la différence de vitesse longitudinale du quatrième ordre (a) et du sixième ordre (b) en fonction du moment d'ordre deux. Les deux lignes en tirets correspondent aux lois d'échelle compatibles avec celles des fonctions de structure lagrangienne [BBC⁺04], à savoir $\zeta_4^L/\zeta_2^L = 1.71$ et $\zeta_6^L/\zeta_2^L = 2.16$. Les encarts montrent les dérivées logarithmiques $d \log \langle |V_{//}(t)|^p \rangle / d \log \langle |V_{//}(t)|^2 \rangle$ pour (a) $p = 4$ et (b) $p = 6$ en fonction de t/t_0 ; les lignes en tirets gras représentent là les propriétés d'échelle lagrangiennes multifractales $\zeta_4^L/\zeta_2^L = 1.71$ et $\zeta_6^L/\zeta_2^L = 2.16$ (voir [BBC⁺04]) et les lignes fines ce qui est attendu pour un comportement auto-similaire.

moments d'ordres plus élevés. Les figures 4.11(a) et (b) montrent l'évolution de $\langle |\mathbf{R}(t) - \mathbf{R}(0)|^4 \rangle_{r_0}$ et de $\langle |\mathbf{R}(t) - \mathbf{R}(0)|^6 \rangle_{r_0}$. Aux temps plus courts que t_0 , la croissance balistique de la séparation donne $\langle |\mathbf{R}(t) - \mathbf{R}(0)|^p \rangle_{r_0} \simeq t^p \langle |\mathbf{V}(0)|^p \rangle_{r_0}$. Redéfinir le temps en échelle de t_0 (qui dépend des statistiques d'ordre deux) implique que les moments ne se chevauchent pas dans ce régime à cause des propriétés multi-échelles eulériennes. Toutefois pour $t \gg t_0$ les données convergent les unes vers les autres et les moments croissent respectivement comme t^6 et t^9 , avec de possibles déviations très faibles. Aussi, cette observation indique que t_0 pourrait être de nouveau l'échelle de temps de convergence vers un tel comportement.

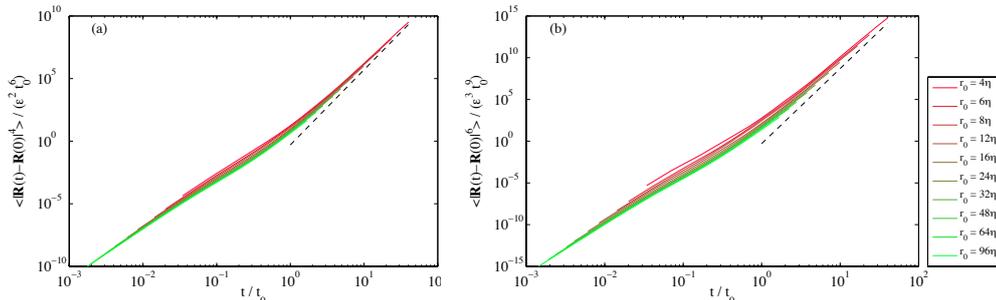


FIGURE 4.11 – Moments (a) d'ordre quatre $\langle |\mathbf{R}(t) - \mathbf{R}(0)|^4 \rangle_{r_0}$ et (b) d'ordre six $\langle |\mathbf{R}(t) - \mathbf{R}(0)|^6 \rangle_{r_0}$ en fonction de t/t_0 et pour $R_\lambda = 730$. Les deux courbes sont normalisées de telle sorte que leur comportement aux temps longs soit respectivement $\propto (t/t_0)^6$ et $\propto (t/t_0)^9$. Les lignes noires représentent ces deux comportements.

La présence d'un régime auto-similaire est aussi clair lorsque l'on utilise comme précédemment des idées empruntées à l'« extended self-similarity » et que l'on représente ces moments en fonction de celui d'ordre deux (voir Fig. 4.12). Cette fois, pour r_0 fixée, les plus petites séparations correspondent au régime balistique. On a là trivialement $\langle |\mathbf{R}(t) - \mathbf{R}(0)|^p \rangle_{r_0} / \langle |\mathbf{R}(t) - \mathbf{R}(0)|^2 \rangle_{r_0}^{p/2} \simeq \langle |\mathbf{V}(0)|^p \rangle_{r_0} / \langle |\mathbf{V}(0)|^2 \rangle_{r_0}^{p/2}$, qui a une dépendance faible en r_0 à cause d'une distribution intermittente des incréments de vitesse eulériens, mais ne dépend pas du temps. Cette auto-similarité temporelle s'observe plus clairement dans les encarts de la Fig. 4.12, qui représentent les dérivées logarithmiques des moments d'ordres quatre et six par rapport au moment d'ordre deux. À des instants de l'ordre de t_0 , des déviations au régime auto-similaire peuvent être détectées. Aux échelles bien plus grandes, les données correspondant à différents r_0 se chevauchent mais les courbes commencent à dévier du comportement auto-similaire. On observe dans les encarts que les pentes locales sont clairement plus petites que $p/2$. Ceci donne de l'évidence en faveur d'un comportement faiblement intermittent de la distribution des séparations entre traceurs. Les mesures présentées ici correspondent à $R_\lambda = 730$ mais le même comportement a aussi été observé pour $R_\lambda = 460$.

Jusqu'à présent, l'observation la plus convaincante d'un comportement intermittent en dispersion relative s'est basé sur l'analyse des des temps de sortie (« exit times ») [BS02, BBC⁺05a]. Toutefois, la relation entre ces statistiques à échelle fixée et celles que nous avons considérées à instant fixé demande de passer par les différences de vitesse entre traceurs. Comme nous l'avons vu dans la sous-section

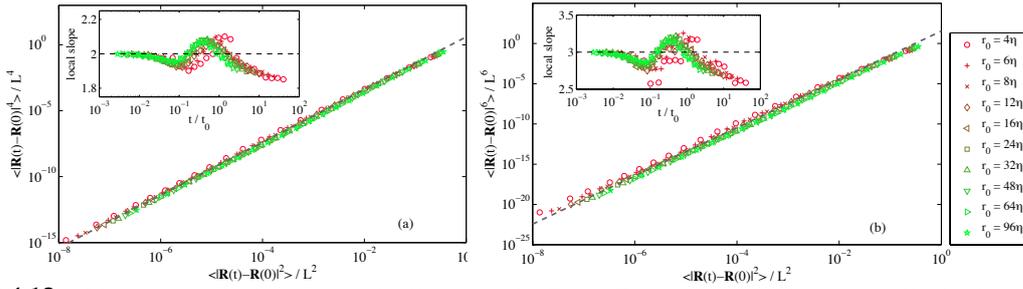


FIGURE 4.12 – Moments (a) d’ordre quatre et (b) d’ordre six de $|\mathbf{R}(t) - \mathbf{R}(0)|$ en fonction du moment d’ordre deux pour $R_\lambda = 730$. Les deux lignes en tirets montrent un comportement invariant d’échelle, c’est-à-dire $\langle |\mathbf{R}(t) - \mathbf{R}(0)|^p \rangle_{r_0} \propto \langle |\mathbf{R}(t) - \mathbf{R}(0)|^2 \rangle_{r_0}^{p/2}$. Les deux encarts montrent les dérivées logarithmiques associées $d \log \langle |\mathbf{R}(t) - \mathbf{R}(0)|^p \rangle_{r_0} / d \log \langle |\mathbf{R}(t) - \mathbf{R}(0)|^2 \rangle_{r_0}$; l’invariance d’échelle apparaît là comme une ligne horizontale.

précédente, les statistiques de ces dernières sont bien plus intermittentes que celles de la séparation. Ceci implique qu’il n’y aucune contradiction entre les propriétés d’échelle quasi auto-similaires que nous observons ici et celle bien plus intermittentes des temps de sortie en fonction de l’échelle.

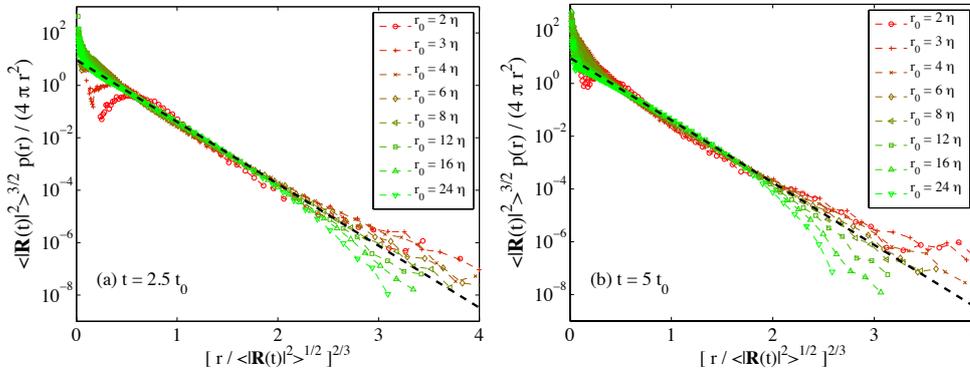


FIGURE 4.13 – Densité de probabilité de la distance $r = |\mathbf{R}(t)|$ aux instants $t = 2.5 t_0$ (a) et $t = 5 t_0$ (b) pour différentes valeurs de la séparation initiale. On a ici normalisé les distribution par $4\pi r^2$ et on les a représenté sur axe logarithmique en y en fonction de $r / \langle |\mathbf{R}(t)|^2 \rangle_{r_0}^{1/2}$. Avec un tel choix, la densité de probabilité (4.2) du modèle de diffusion de Richardson apparaît comme une ligne droite (représentée ici par une ligne en tirets noirs).

Pour étudier plus en détails cette intermittence faible de la distribution des séparations, nous avons représenté sur la Fig. 4.13 la densité de probabilité de la distance $|\mathbf{R}(t)|$ pour différentes séparations initiales et à des instants auxquels nous pensons avoir convergé vers le régime explosif, à savoir $t = 2.5 t_0$ et $t = 5 t_0$. De telles mesures sont comparées au comportement donné par la loi diffusive de Richardson (4.2). Les données suggèrent que le coeur de la distribution (pour $0.4 \lesssim |\mathbf{R}(t)| / \langle |\mathbf{R}(t)|^2 \rangle_{r_0}^{1/2} \lesssim 4$ au temps $t = 5 t_0$) est assez bien approché par la loi de Richardson. Toutefois, des déviations sont observées dans les queues lointaines, aussi bien pour les petites que les grandes séparations. Une telle observation est en accord avec d’autres travaux numériques [BS02, BBC⁺05a, SBT12]. Apparemment, ces déviations n’affectent que faiblement les moments que nous avons mesuré ici.

Essayons de comprendre plus avant les mécanismes conduisant aux fortes fluctuations de la distance $|\mathbf{R}(t)|$ entre les traceurs. Les statistiques de cette quantité conditionnées sur une distance initiale r_0 fixée peuvent être interprétées de manière géométrique en termes de l’évolution temporelle d’une sphère de rayon r_0 centrée sur une trajectoire de référence. Le transport de cette surface par un écoulement turbulent est généralement assez complexe. L’incompressibilité implique que le volume de la sphère est conservé mais l’irrégularité du champ de vitesse peut être responsable de très fortes distorsions à la surface de celle-ci. Ceci est représenté sur la Fig. 4.14(a) qui montre pour $R_\lambda = 460$ et trois différents instants la forme définie par la position de 60 trajectoires qui sont initialement à une distance 24η d’un traceur de référence. Cette exemple permet déjà de faire quelques commentaires qualitatifs. D’une part, on voit que les grandes excursions de la distance inter-particulaire sont accompagnés de pincement forts de la surface. D’autre part, il est clair que les fortes extensions se produisent d’une manière corrélée en temps : les angles de la surface qui sont visibles aux temps longs s’étaient déjà formés auparavant. Comme cela est montré en détail dans [BHB13], les paires qui sont le plus séparées l’ont été pour des temps longs et transportent avec elles une mémoire de la condition initiale. Nous avons vu précédemment que la queue

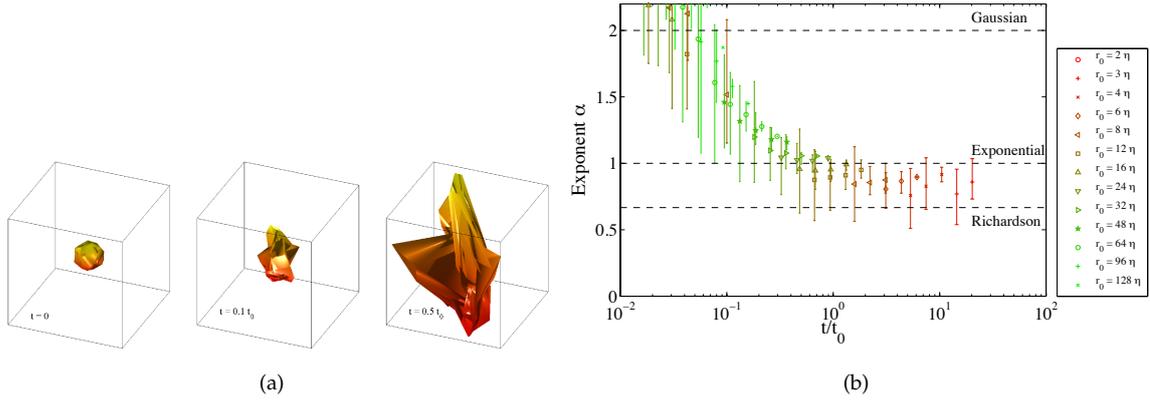


FIGURE 4.14 – (a) Évolution quasi-lagrangienne d'un ensemble de traceurs qui sont initialement à une distance $r_0 = 24\eta$ d'une trajectoire de référence. (b) Exposant α de la queue droite de la densité de probabilité des distances $|\mathbf{R}(t)|$ en fonction du temps et pour différentes séparations. Les exposants ont été obtenus en ajustant la courbe de $-\log p(|\mathbf{R}|)$ à une loi de puissance pour $\langle |\mathbf{R}(t)| \rangle_{r_0} < |\mathbf{R}(t)| < 0.5L$.

droite de la distribution des séparations n'est pas bien décrite par la distribution de Richardson : comme on l'a vu sur la Fig. 4.13(b) pour $t = 5t_0$, elle semble plus large que $\exp(-C|\mathbf{R}|^{2/3})$ pour $r_0 \lesssim 8\eta$ et plus étroite sinon. Les événements violents sont de moins en moins probables lorsque soit r_0 , soit t augmentent. Nous avons bien entendu vérifié que ces comportements ne sont pas dus à une contamination par les paires qui ont atteint les grandes échelles de l'écoulement turbulent : les échelles atteintes par les plus grandes séparations restent plus petites que l'échelle intégrale L , qui vaut elle-même moins d'un tiers de la période spatiale. La dépendance de la forme de la queue en r_0 et en temps peut s'interpréter comme un effet de mémoire pour ces événements.

Pour obtenir une information plus quantitative sur la distribution des grandes séparations, nous avons estimé et ajusté sa forme fonctionnelle pour en étudier les variations. Les données semblent indiquer que $p(|\mathbf{R}|) \propto \exp(-C|\mathbf{R}|^\alpha)$. La figure 4.14(b) montre le comportement temporel de l'exposant α pour les différentes valeurs de la séparation initiale. Les trois lignes horizontales correspondent à une queue gaussienne ($\alpha = 2$), exponentielle ($\alpha = 1$) et à la distribution de Richardson ($\alpha = 2/3$). À l'instant initial $t = 0$, la distribution est concentrée sur r_0 et a un support compact, de telle sorte que $\alpha = \infty$. L'exposant décroît ensuite, traverse la valeur $\alpha = 1$ (de telle sorte que la distribution devient sous-exponentielle) pour $t \approx 0.1t_0$, et atteint une valeur minimale qui dépend de la séparation initiale r_0 . Pour les plus petites valeurs de r_0 , cette valeur minimale est en dessous de la prédiction de Richardson, comme cela a été vu ci-dessus. Pour les séparations initiales plus grandes, ce minimum décroît et pour $r_0 \gg \eta$, on a l'impression que les courbes saturent vers la valeur $\alpha = 1$. Aussi, on ne peut pas exclure que toutes les courbes convergent vers la valeur associée à une queue exponentielle lorsque $t \rightarrow \infty$. L'augmentation finale de l'exposant que nous voyons pour les plus petites valeurs de r_0 peut difficilement être attribué à des effets de taille finie, vu que nous avons exclu toutes les paires qui sont séparées par une distance plus grande que $L/2$.

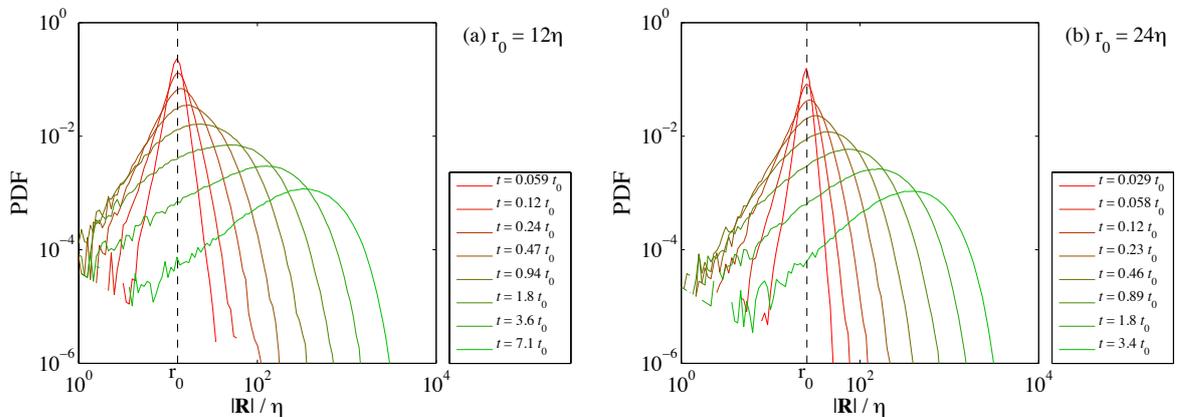


FIGURE 4.15 – Densités de probabilité de la séparation entre traceurs pour différents instants et des séparations initiales $r_0 = 12\eta$ (a) et $r_0 = 24\eta$ (b).

Des événements bien plus violents et intermittents ont lieu pour les particules qui se séparent bien moins que la moyenne. Ceci est clair sur la Fig. 4.15 qui représente la distribution des distances $|\mathbf{R}|$ à différents instants pour des séparations initiales aux échelles inertielles. Aux petits instants, la distribution est concentrée sur r_0 . Lorsque le temps augmente, son maximum, qui correspond grosso modo à la valeur de sa moyenne $\langle |\mathbf{R}(t)| \rangle_{r_0}$, se translate vers les valeurs plus grandes et simultanément, la distribution s'élargit aussi bien aux petites qu'aux grandes valeurs. Ceci conduit au développement pour $r_0 \ll |\mathbf{R}| \ll \langle |\mathbf{R}| \rangle_{r_0}$ d'une gamme de séparations intermédiaires qui sont en retard par rapport au comportement moyen. Dans cette asymptotique intermédiaire, la densité de probabilité se comporte comme une loi de puissance $p(|\mathbf{R}|) \propto |\mathbf{R}|^\beta$, où l'exposant β évolue en fonction du temps et de r_0 . Cette loi de puissance est encore plus claire lorsque l'on mesure la probabilité cumulée $P^<(r) = \text{Prob}[|\mathbf{R}| < r] = \int_0^r p(r') dr' \propto r^{\beta+1}$. La loi de Richardson donne $\beta = 2$, et donc $P^<(r) \propto r^3$. L'exposant β peut être interprété en termes de géométrie fractale. Si toutes les trajectoires étaient uniformément et indépendamment réparties en espace, la fraction de paires à une distance plus petite que r serait $\propto r^d$, où $d = 3$ est la dimension d'espace. Aussi, on s'attendrait à ce que cette fraction soit $\propto r^{d-1}$ si toutes les trajectoires étaient confinées sur une surface et $\propto r^{d-2}$ si elles étaient sur une courbe. En général, l'exposant $\beta + 1 = \lim_{r \rightarrow 0} [\log P^<(r)] / [\log r]$ mesure la dimension de corrélation d'un ensemble fractal (voir section 1.1.1). Le comportement en r^2 associé à la distribution de Richardson correspond à l'idée qu'aux temps suffisamment longs, les trajectoires oublient leur séparation initiale et se distribue de façon homogène en espace.

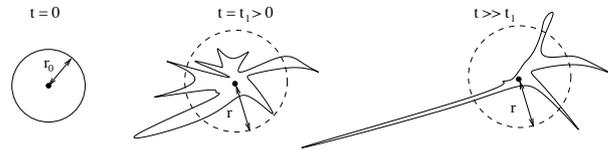


FIGURE 4.16 – Schéma de l'évolution temporelle de trajectoires qui sont situées initialement à une distance r_0 d'un traceur de référence (point noir au centre du cercle) puis se dispersent.

Comme nous l'avons mentionné plutôt, la dispersion de paires peut s'interpréter comme l'évolution moyenne lagrangienne d'une surface sphérique initiale de rayon r_0 centrée sur une trajectoire de référence. Au temps $t = 0$, il est clair que $P^<(r)$ est une fonction de Heaviside centrée en $r = r_0$, de telle sorte que $\beta = \infty$. Aux instants ultérieurs, l'étirement et le pincement de la sphère conduisent à un comportement non-trivial de $P^<(r)$ pour $r \ll \langle |\mathbf{R}| \rangle_{r_0}$. Ce comportement est schématisé sur la Fig. 4.16. L'exposant β mesure donc la fractalité de l'image de la sphère par l'écoulement lagrangien. Il est lié à la fraction de son image qui reste à une distance plus petite que r de la trajectoire de référence. Aux temps suffisamment longs, on s'attend à ce que l'ensemble des trajectoires soit pour l'essentiel étiré par les tourbillons de l'écoulement qui ont le temps de corrélation le plus pertinent, à savoir ceux dont la taille est de l'ordre de $\langle |\mathbf{R}(t)| \rangle_{r_0}$, et que les fluctuations à petite échelle deviennent de moins en moins pertinentes. Ainsi, aux échelles $r \ll \langle |\mathbf{R}(t)| \rangle_{r_0}$ et aux temps très longs, les seules paires restantes devraient être distribuées sur une surface (courbe en dimension deux) de telle sorte que $\beta + 1 \simeq 2$ et $p(r) \propto r$. Ceci contredit la prédiction de Richardson qui, d'une certaine manière, postule que le temps de corrélation des différences de vitesse ne dépend pas de l'échelle.

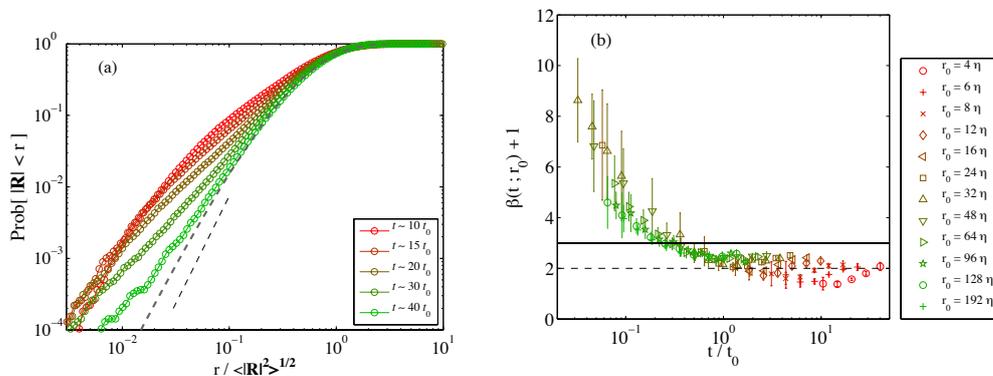


FIGURE 4.17 – (a) Probabilité cumulée de la distance $P^<(r) = \text{Prob}[|\mathbf{R}| < r]$ en fonction de r pour $r_0 = 4\eta$ et à différents instants; la ligne en tirets $\propto r^3$ correspond à la distribution de Richardson. (b) Évolution temporelle de l'exposant β pour différentes séparations initiales. ligne pleine correspond à Richardson ($\beta = 2$) et celle en tirets à $\beta = 1$.

Pour éclaircir ces idées, nous avons évalué l'exposant β pour différents r_0 et différents instants. Pour cela, nous avons utilisé la probabilité cumulée $P^<(r)$ (représentée sur la Fig. 4.17(a) pour $r_0 = 4\eta$) pour obtenir $\beta + 1$. Les résultats sont présentés sur la Fig. 4.17(b) en fonction du temps. Aux grandes barres d'erreur près dues à un manque de statistiques, on observe que l'échelle de temps t_0 est de nouveau pertinente pour décrire à la fois la dynamique initiale et la convergence vers un régime asymptotique. Aux petits temps $t \ll t_0$, l'exposant $\beta + 1$ prend de grandes valeurs positives. À l'instant $t \approx 0.3t_0$, il devient plus petit que 3. Pour $t \gg t_0$, il s'approche asymptotiquement de la valeur $\beta = 1$, de telle sorte que les données donnent de l'évidence en faveur de l'argument exposé ci-dessus. Il est intéressant de noter que pour les séparations initiales les plus petites $r_0 \lesssim 16\eta$, la limite est atteinte par en dessous et est précédée par un minimum de β . Cela signifie qu'aux temps intermédiaires, le pincement (ou de façon équivalente l'étirement) de la sphère de rayon initial r_0 est tellement fort qu'elle définit un objet dont la dimension est plus petite que celle d'une surface. Un tel comportement singulier temporaire est très certainement lié à la présence de queues plus larges qu'une exponentielle aux très grandes distances.

4.1.4 Stationnarité du taux de transfert local

Le but de cette section est, d'une part, de donner des arguments en faveur du comportement diffusif de la vitesse de la section 4.1.2 et, d'autre part, de mieux comprendre les mécanismes responsables du comportement intermittent des séparations que nous avons observé dans la section 4.1.3. Nous avons précédemment vu que la vitesse joue un rôle fondamental dans l'approche des statistiques des séparations vers le régime explosif. Toutefois, la convergence de $\langle |V(t)|^2 \rangle_{r_0}$ vers un comportement $\propto t$ n'est pas si claire dans les données numériques. En plus, les propriétés intermittentes que nous avons observées pour $V(t)$ ne permettent pas de penser que le régime asymptotique de la vitesse est auto-similaire. La situation est très différente lorsque l'on s'intéresse aux statistiques combinées de la distance et de la vitesse. Comme cela est montré dans [BHB12], le moment $\langle [V^\parallel(t)]^3 / |\mathbf{R}(t)| \rangle_{r_0}$, qui est initialement négatif et égal à $-(4/5)\varepsilon$, tend très rapidement vers une constante positive (voir Fig. 4.18(a)).

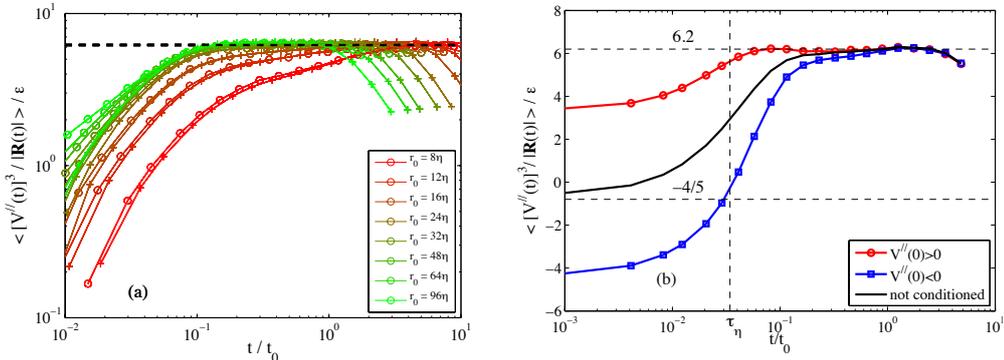


FIGURE 4.18 – (a) Évolution temporelle de moment combiné $\langle [V^\parallel(t)]^3 / |\mathbf{R}(t)| \rangle_{r_0}$ pour différentes séparations initiales et les deux valeurs du nombre de Reynolds : $R_\lambda = 730$ (o) et $R_\lambda = 460$ (+). La ligne noire horizontale représente la valeur asymptotique $\langle [V^\parallel(t)]^3 / |\mathbf{R}(t)| \rangle_{r_0} \approx 6.2 \varepsilon$. (b) Idem pour $r_0 = 24 \eta$ dans le cas $R_\lambda = 730$ (ligne noire) et pour le même moment mais conditionné sur les valeurs positives (courbe rouge) ou négative (courbe bleue) de la différence de vitesse longitudinale initiale $V^\parallel(0)$.

La décroissance aux temps très longs vient de la contamination par les paires qui ont atteint des distances de l'ordre de l'échelle intégrale. La valeur asymptotique $\approx 6.2 \varepsilon$ semble ne dépendre que faiblement du nombre de Reynolds. Le chevauchement des courbes associées à différents nombres de Reynolds et, pour $r_0 \gg \eta$, à différentes valeurs de la distance initiale, semble indiquer que le temps de convergence est de l'ordre de t_0 . La figure 4.18(b) montre le même moment mais conditionné sur le signe de la différence de vitesse longitudinale initiale. On y observe que pour les paires qui initialement se séparent, la convergence vers la valeur asymptotique est sur des temps de l'ordre de t_η . Au contraire, pour les traceurs qui se rapprochent initialement, la convergence est moins rapide. Nous avons vu dans la section 4.1.2 que de telles paires atteignent d'abord leur distance minimale à l'instant $t \approx t_* \approx 0.01 t_0$. À cet instant, $\langle [V^\parallel(t)]^3 / |\mathbf{R}(t)| | V^\parallel(0) < 0 \rangle_{r_0}$ change de signe et la convergence vers $\approx 6.2 \varepsilon$ ne se passe que plus tard. Ces paires qui s'approchent initialement font que la convergence globale est sur des temps de l'ordre de t_* . Le moment combiné $\langle [V^\parallel(t)]^3 / |\mathbf{R}(t)| \rangle_{r_0}$, qui est une sorte de « taux de transfert local » le long des paires de trajectoires de traceurs, est donc conservé par le flot lagrangien.

En fait, ce n'est pas seulement la moyenne du taux de transfert local qui converge vers une constante mais l'intégralité de sa distribution qui atteint un régime stationnaire sur des temps de l'ordre de t_* .

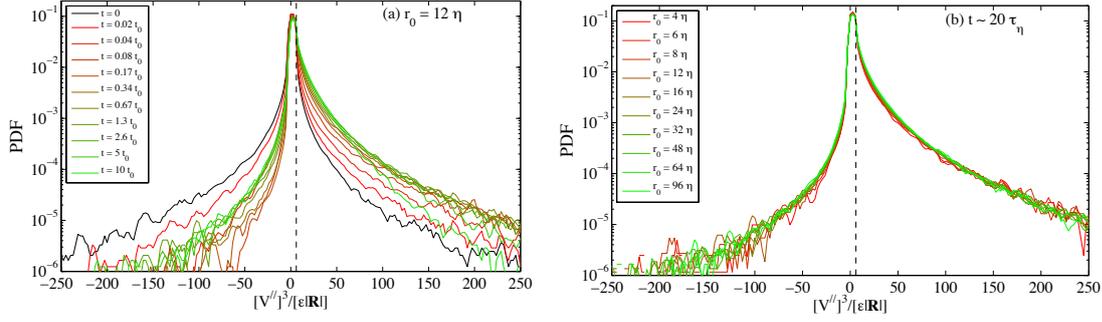


FIGURE 4.19 – (a) Densité de probabilité du « taux de transfert local » $[V^{\parallel}(t)]^3/|\mathbf{R}(t)|$ pour $r_0 = 24\eta$ et différents instants. (b) Idem mais cette fois-ci pour différentes séparations et à l’instant $t = 20\tau_\eta$ fixé. Le rapport t/t_0 va ici de 0.2 à 5 de telle sorte que dans tous les cas le moment combiné $\langle [V^{\parallel}]^3/|\mathbf{R}| \rangle$ a atteint sa valeur asymptotique. Sur les deux figures, la ligne verticale montre la position de la valeur moyenne $\approx 6.2\varepsilon$.

La figure 4.19(a) montre pour une séparation initiale donnée, la convergence aux temps longs de la densité de probabilité de $[V^{\parallel}(t)]^3/|\mathbf{R}(t)|$. On observe les queues droite et gauche convergent sur des échelles de temps différentes. Pour les grandes valeurs (paires qui s’éloignent), la convergence se fait sur des temps de l’ordre de τ_η (qui dans ce cas est $\approx 0.07t_0$), tandis que pour les valeurs négatives, (paires qui se rapprochent), la convergence est plus lente. À l’instant le plus grand ($t \approx 5t_0$) on observe que des déviations à la distribution asymptotique ont lieu aux grandes valeurs positives. C’est une contamination par les grandes échelles de l’écoulement qui est en accord avec ce qui a été observé sur les Figs. 4.18(a) et (b) pour les déviations de la valeur moyenne. La figure 4.19(b) montre les densités de probabilité de $[V^{\parallel}]^3/|\mathbf{R}|$ pour différentes séparations initiales et à un instant suffisamment grand pour être assuré que toutes les distributions aient atteint leur régime stationnaire. On observe que les distributions se chevauchent de manière assez robuste. Cet effondrement sur une courbe maîtresse est bien plus prononcé que pour toutes les autres distributions que nous avons regardées jusqu’à présent. Notons que sur la Fig. 4.19, les distributions sont brutes et qu’elles n’ont pas subi de remise à l’échelle par un moment quelconque de $[V^{\parallel}]^3/|\mathbf{R}|$. La distribution asymptotique atteint son maximum proche de 0 (et non de sa valeur moyenne) et, selon nos données, les queues sont super-exponentielles de la forme $\exp(-C|V^{\parallel}|/|\mathbf{R}|^{1/3})$ aux deux extrémités.

À notre connaissance, la convergence rapide et manifeste de cette statistique mixte n’avait jamais été observée avant [BHB12]. D’un point de vue phénoménologique, on s’attend à ce que $[V^{\parallel}]^2 \propto t \propto |\mathbf{R}|^{1/3}$ dans le régime explosif de Richardson–Obukhov, de telle sorte que le taux de transfert local $[V^{\parallel}]^3/|\mathbf{R}|$ correspond à la variable d’échelle dans une situation auto-similaire. Toutefois, nous avons observé ici que la convergence de cette quantité vers sa forme asymptotique a lieu sur des échelles de temps bien plus courtes que celles qui étaient observées dans la section 4.1.1 par exemple pour $\langle |\mathbf{R}|^2 \rangle$. Ceci indique que la stabilisation du taux local pourrait être plutôt à l’origine du régime explosif qu’une conséquence de celui-ci. À ce moment, il n’y a pas de compréhension claire des mécanismes physiques responsables du comportement observé. Nous présentons toutefois maintenant des arguments qui permettent de le relier aux statistiques des différences d’accélération entre les traceurs.

Comme nous l’avons déjà mentionné précédemment, la différence de vitesse \mathbf{V} entre deux traceurs est corrélée sur des temps de l’ordre du temps de retournement τ_r associé à la distance r entre eux. Ce temps augmente trop rapidement avec $|\mathbf{R}(t)|$ pour que l’approche diffusif de Richardson soit physiquement recevable. Toutefois, on sait qu’en turbulence, les composantes de l’accélération, qui est une quantité à petite échelle, sont corrélées sur des temps de l’ordre du temps dissipatif de Kolmogorov τ_η [MCB04]. Nous avons confirmé numériquement que ces observations s’étendent à la différence d’accélération entre deux traceurs $\mathbf{A}(t)$. Sa fonction d’auto-corrélation temporelle est représentée sur la Fig. 4.20(a). On y voit bien que cette quantité se décroît sur des temps de l’ordre de τ_η . Ceci suggère que lorsque l’on s’intéresse à des temps suffisamment longs (dans les échelles inertielles de la turbulence), la différence d’accélération peut être approximée par un processus aléatoire delta-corrélé en temps, de telle sorte que

$$\mathbf{A} \simeq \sqrt{\tau_\eta^{\text{loc}}} \mathbb{A}(\mathbf{R}, \mathbf{V}) \boldsymbol{\eta}(t), \quad (4.15)$$

où $\boldsymbol{\eta}(t)$ est un bruit blanc 3D standard. La matrice \mathbb{A} est définie par $\mathbb{A}^\top \mathbb{A} = \langle \mathbf{A}(t) \otimes \mathbf{A}(t) | \mathbf{R}, \mathbf{V} \rangle_{r_0}$. Nous avons utilisé ici le théorème de la limite centrale pour écrire (4.15). Ceci implique que le produit est compris au sens de Stratonovich. Des arguments dimensionnels indiquent que le temps de Kolmogorov local τ_η^{loc} et l’amplitude de l’accélération $A = |\mathbf{A}|$ ne dépendent que de la viscosité ν et du taux local de

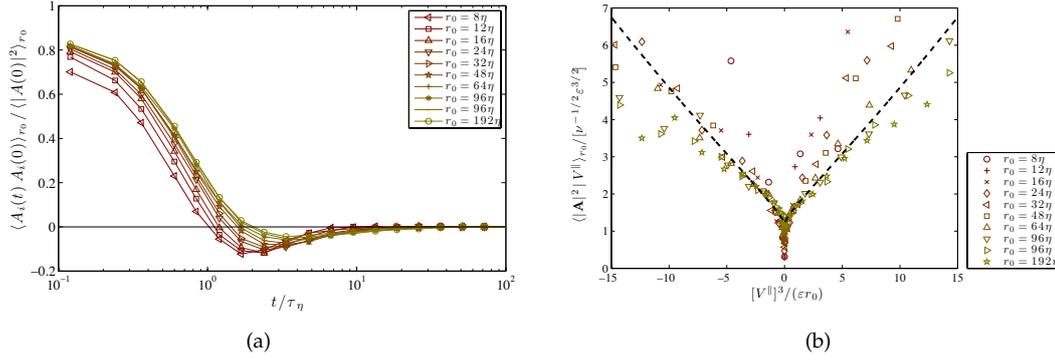


FIGURE 4.20 – (a) Auto-corrélation temporelle $\langle A_i(t)A_i(0) \rangle_{r_0}$ des différences d'accélération entre traceurs pour différents r_0 et $R_\lambda = 730$. (b) Variance de l'amplitude de la différence d'accélération conditionnée sur la valeur de la différence de vitesse longitudinale V^\parallel et en fonction du taux local de transfert $|V^\parallel|^3/\nu$. Les différents symboles correspondes à différentes valeurs de la séparation r .

transfert d'énergie ε_{loc} . Avec de tels arguments ces quantités locales peuvent être écrites comme $\tau_\eta^{\text{loc}} \sim \nu^{1/2}/\varepsilon_{\text{loc}}^{1/2}$ et $A \sim \varepsilon_{\text{loc}}^{3/4}/\nu^{1/4}$. Ceci conduit à écrire le coefficient de diffusion comme $(\tau_\eta^{\text{loc}})^{1/2}A \sim \varepsilon_{\text{loc}}^{1/2}$. Il est intéressant de noter que cette quantité est indépendante de ν et que l'on peut donc s'attendre à ce qu'elle ait une limite finie au nombres de Reynolds infinis. La dissipation locale est une fonction des variables courantes associées aux traceurs, à savoir leur séparation \mathbf{R} et leur différence de vitesse \mathbf{V} . Des arguments dimensionnels suggèrent que $\varepsilon_{\text{loc}} \sim V^3/R$. Toutefois, pour $V = 0$, on ne s'attend pas à ce que la dissipation locale s'annule mais à ce qu'elle vienne d'une contribution à travers la pression des tourbillons à plus grande échelle, ce qui conduit à $\varepsilon_{\text{loc}} \simeq \varepsilon$, le taux moyen de dissipation d'énergie. En résumé, on s'attend à ce que

$$\varepsilon_{\text{loc}}(t) \sim \varepsilon + \alpha \frac{[V^\parallel(t)]^3}{|\mathbf{R}(t)|}, \quad (4.16)$$

où α est un paramètre ajustable. Nous avons de nouveau utilisé la différence de vitesse longitudinale entre les traceurs $V^\parallel = \mathbf{R} \cdot \mathbf{V}/|\mathbf{R}|$. Toutes ces estimations ont été testées dans nos simulations numériques. La figure 4.20(b) représente la variance des différences d'accélération conditionnée sur la différence de vitesse longitudinale et la séparation entre les traceurs. On voit qu'aux erreurs statistiques près, les données sont en assez bon accord avec la prédiction phénoménologique donnée par (4.16), qui est représentée pour $\alpha = 0.18$ par une ligne en tirets.

Les considérations phénoménologiques que nous avons utilisées ici sont purement scalaires. Elles donnent de bonnes estimations de la variance du module des différences d'accélération mais ne renseignent en rien sur la structure tensorielle de la matrice \mathbb{A} . En particulier, il faudrait développer plus avant ce modèle pour prendre en compte l'incompressibilité de l'écoulement. Pour éviter de rencontrer de telles difficultés, nous nous concentrons dans la suite sur le cas unidimensionnel. L'idée est d'utiliser les informations que nous venons d'obtenir sur les différences d'accélération pour introduire un modèle capable de reproduire les mécanismes les plus importants de la dispersion relative sans bien sûr avoir la prétention de reproduire de façon quantitative ce qui se passe dans les écoulements réels. On écrit ainsi que la séparation $R(t)$ et la différence de vitesse (toujours longitudinale en 1D) $V(t)$ sont les solutions du système stochastique

$$dR = V dt, \quad dV = -b \frac{|V|}{R} V dt + \left[1 + c \frac{|V|^3}{R} \right]^{1/2} dW_t, \quad (4.17)$$

où $W(t)$ désigne le processus de Wiener. Ces équations sont ici comprises au sens de Itô. Cette formulation peut être vue comme une application du théorème de la limite centrale à l'intégrale temporelle des différences d'accélération qui peut être écrite comme une somme d'intégrales indépendantes sur des intervalles de longueur τ_η . Le terme de dérive est dû au changement de formulation des intégrales stochastiques de Stratonovich vers Itô. Toutefois, nous supposons que les paramètres b et c ne sont pas directement reliés entre eux.

Alors que sa formulation est relativement simple, le modèle (4.17) ne peut pas être intégré explicitement. Ceci est dû pour l'essentiel à la présence de termes non-linéaires pour à la fois la dérive et la diffusion. Toutefois, on peut faire les remarques suivantes. Lorsque l'on écrit l'équation de Fokker-

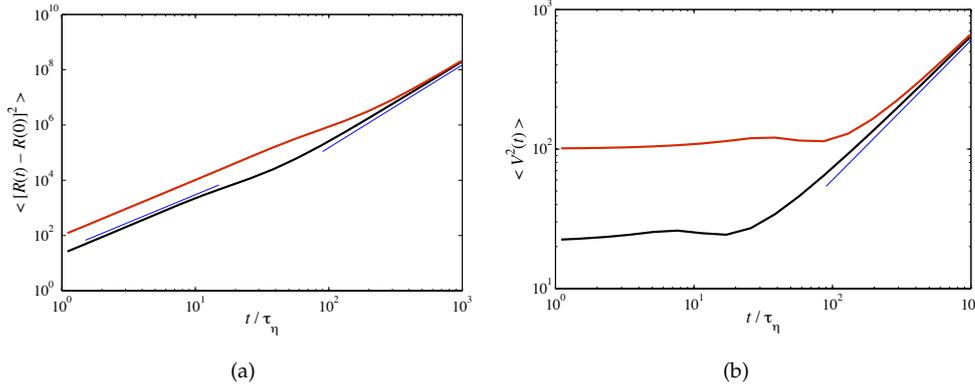


FIGURE 4.21 – (a) Évolution temporelle du déplacement carré moyen pour le modèle stochastique (4.17) avec $c = b = 0.1$ pour des paires telles que $R(0) = 100\eta$ (noir) et $R(0) = 1000\eta$ (rouge). Les deux lignes bleues montrent respectivement le régime balistique $\propto t^2$ (à gauche) et la loi explosive $\propto t^3$ (à droite). (b) Évolution temporelle de la différence de vitesse carrée moyenne dans les mêmes cas. La ligne bleue montre là le comportement diffusif $\propto t$.

Planck pour la densité de probabilité de transition $p(r, v, t | r_0, v_0, 0)$, à savoir

$$\partial_t p + v \partial_r p - \partial_v \left[b \frac{|v| v}{r} p \right] = \partial_v^2 \left[\left(1 + c \frac{|v|^3}{r} \right) p \right], \quad (4.18)$$

on peut montrer qu'il existe des solutions auto-similaires de la forme $p(r, v, t) = t^{-2} \Psi(r/t^{3/2}, v/t^{1/2})$. Cette loi d'échelle correspond exactement à l'auto-similarité associée au comportement explosif de Richardson–Obukhov. La fonction Ψ est solution d'une équation de Fokker–Planck stationnaire. Toutefois, les techniques traditionnelles utilisées pour résoudre ce type de problème ne peuvent pas être utilisées de façon simple pour obtenir la solution invariante d'échelle. Ceci nous a conduit à avoir recours aux simulations numériques. Elles mêmes conduisent à certaines difficultés : la dynamique devient raide lorsque $R \rightarrow 0$. Toutefois, une intégration sophistiquée avec un pas de temps adaptatif nous a permis de voir que le système peut atteindre $R = 0$ au bout d'un temps fini. La singularité est atteinte à un temps t_* auquel à la fois R et la vitesse V s'annulent, respectivement comme $R(t) \propto (t_* - t)^{3/2}$ et $V(t) \propto -(t_* - t)^{1/2}$, c'est-à-dire avec les mêmes exposants que ceux du régime invariant d'échelle. Ainsi, pour étudier les solutions de (4.17) aux temps longs, il faut prescrire une coupure ultra-violette à une séparation η et y associer une condition de bord. Nous avons testé plusieurs choix (conditions réfléchives, absorbantes, aléatoires) et n'avons pas détecté de changement qualitatif significatif. On a ainsi choisi sans perte de généralité des conditions absorbantes. Aussi, nous n'avons pas exploré de façon systématique l'espace des paramètres b et c et les résultats présentés dans la suite se cantonnent au choix $b = 0.1$ and $c = 0.1$.

La figure 4.21(a) montre l'évolution du déplacement carré moyen $\langle [R(t) - R(0)]^2 \rangle$ en fonction du temps. On observe clairement pour le modèle les deux régimes propres à la dispersion relative, à savoir un régime balistique $\propto t^2$ au temps court suivi d'une croissance explosive où $\langle R^2(t) \rangle \propto t^3$ et la dépendance en la séparation initiale a disparu. La figure 4.21(b) représente l'évolution de la moyenne du carré de la différence de vitesse. Les données montrent clairement un régime diffusif où $\langle V^2(t) \rangle \propto t$. Nous avons aussi mesuré l'évolution du taux de transfert local $\langle V^3(t)/R(t) \rangle$. Les résultats sont montrés sur les Fig. 4.22(a) et (b). Cette quantité, après un régime transitoire qui dépend des conditions de bord choisies à $R = \eta$, atteint un régime statistiquement stationnaire avec une limite de sa valeur moyenne indépendante de $R(0)$. Comme on le voit sur la Fig. 4.22(b), les densités de probabilité se stabilisent vers une forme qui pourrait sembler être dans la même classe d'universalité que le cas turbulent.

Les observations que nous avons effectuées sur le comportement du modèle sont très similaires aux mesures que nous avons effectuées dans des écoulements turbulents. Aussi, elles suggèrent que le régime invariant d'échelle prédit à partir de l'équation de Fokker–Planck puisse être atteints par les solutions du modèle aux temps longs. Ceci est confirmé lorsque l'on regarde les propriétés d'échelle des distributions de la séparation ou des différences de vitesse. Toutefois, pendant le régime transitoire, la densité de probabilité de la séparation représentée sur la Fig. 4.22(c) présente des queues aux petites valeurs qui sont très similaires à celles que nous avons observées en turbulence. Cette densité de probabilité se comporte en effet comme $p(R) \propto R^\alpha$ avec un exposant α qui dépend du temps. Initialement, $\alpha = +\infty$ et aux temps plus longs, il converge vers ≈ -0.5 . Cette valeur dépend du choix des

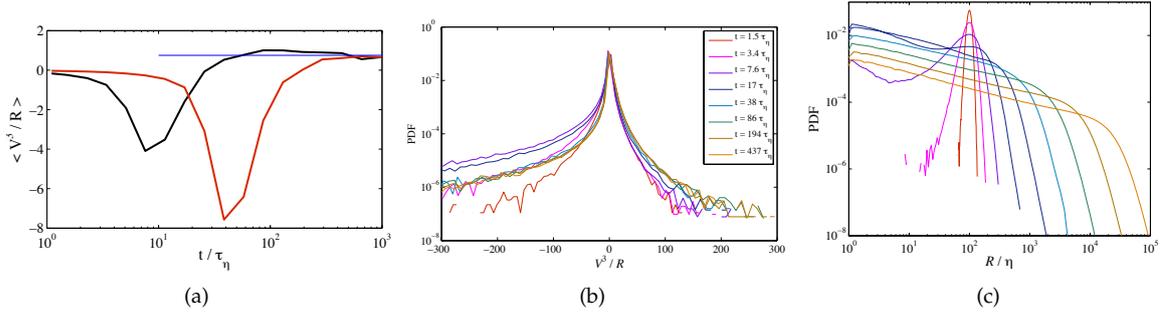


FIGURE 4.22 – (a) Évolution temporelle du taux local de transfert moyen $\langle V^3(t)/R(t) \rangle$ le long des solutions du modèle stochastique avec $c = b = 0.1$ et pour des paires telles que $R(0) = 100\eta$ (en noir) et $R(0) = 1000\eta$ (en rouge). (b) Densité de probabilité de $V^3(t)/R(t)$ pour les solutions du système stochastique pour $R(0) = 100\eta$. Les différentes courbes correspondent à différents instants. (c) Densité de probabilité de la séparation R entre deux trajectoires obtenue pour le système stochastique avec $R(0) = 100\eta$.

paramètres b et c . Le fait que cette valeur est négative est une signature claire de la compressibilité du modèle stochastique unidimensionnel.

4.2 Dispersion de particules lourdes

4.2.1 Echelles dissipatives et exposants de Lyapunov

Dans cette section, nous retraçons les travaux publiés dans [BBB⁺06b] sur l'étude du spectre de Lyapunov des particules inertielles en fonction de leur temps de réponse τ et du nombre de Reynolds R_λ de l'écoulement dans lequel elles sont suspendues. Nous avons pour cela utilisé des simulations numériques directes dans lesquelles les trajectoires d'un grand nombre de particules lourdes ponctuelles sont intégrées. Pour des temps de réponse τ plus grands que le temps de retournement τ_η à l'échelle de Kolmogorov, la présence d'inertie a pour conséquence une réduction de la chaotité des trajectoires : le plus grand exposant de Lyapunov est plus petit que celui associé à la dynamique des traceurs et les fluctuations chaotiques les plus importantes deviennent moins probables. De façon remarquable, pour $\tau < \tau_\eta$, on observe une augmentation de la chaotité ; cet effet peut être compris en terme de concentration préférentielle des particules dans les régions de fort étirement de l'écoulement. Pour les traceurs, nous observons des effets de l'intermittence du fluide sur les fluctuations chaotiques : la dépendance en nombre de Reynolds dévie des prédictions basées sur des arguments dimensionnels. Nous trouvons que de telles déviations persistent pour des particules pourvues d'inertie. Dans nos simulations numériques, les équations de Navier–Stokes incompressibles sont intégrées sur des grilles tridimensionnelles comprenant 128^3 , 256^3 et 512^3 points de grille avec des conditions de bord périodiques. Nous utilisons un code pseudo-spectral dans lequel l'injection se fait en maintenant constante l'énergie contenue dans les deux premières coquilles de l'espace de Fourier. Les nombres de Reynolds de ces trois simulations sont respectivement $R_\lambda = 65$, 105 et 185 . Une fois que l'écoulement est dans un régime statistiquement stationnaire, des particules sontensemencées de façon homogène. Nous suivons trente-trois familles composées de 2000 particules avec des nombres de Stokes allant de 0 à 2.2 pendant un temps $\simeq 200 \tau_\eta$ après la relaxation des transitoires. Pour calculer le spectre de Lyapunov, nous suivons le long des trajectoires des particules l'évolution temporelle de six ($2 \times d$) déplacements infinitésimaux dans l'espace des phases positions-vitesses en intégrant le système tangent à la dynamique des particules. Ceci nous permet de mesurer les exposants de Lyapunov à temps fini (ou taux d'étirement) $\gamma_i(T)$ qui convergent aux temps longs vers les exposants de Lyapunov $\lambda_i = \lim_{T \rightarrow \infty} \gamma_i(T)$ (voir section 1.1.1). Par définition, ceux-ci sont indexés dans l'ordre décroissant $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_{2d}$. Pour calculer numériquement les taux d'étirement, nous utilisons la technique standard basée sur l'orthonormalisation en utilisant la procédure de Gram–Schmidt des déplacements infinitésimaux à des laps de temps fixés (voir, par exemple, [CPV93]).

La figure 4.23(a) montre le comportement des trois plus grands exposants de Lyapunov en fonction de St pour la plus grande valeur du nombre de Reynolds. Comme nous l'avons vu dans la section 1.1.1, ces trois exposants déterminent l'évolution temporelle des éléments infinitésimaux de l'espace physique. Pour les nombres de Stokes que nous avons considéré ici, on observe $\lambda_4 \sim \lambda_5 \sim \lambda_6 \approx -1/\tau$, ce qui signale la relaxation de la vitesse des particules vers celle du fluide. Le plus grand exposant de Lyapunov mesure la séparation chaotique entre les trajectoires de particules. Pour comprendre comment la

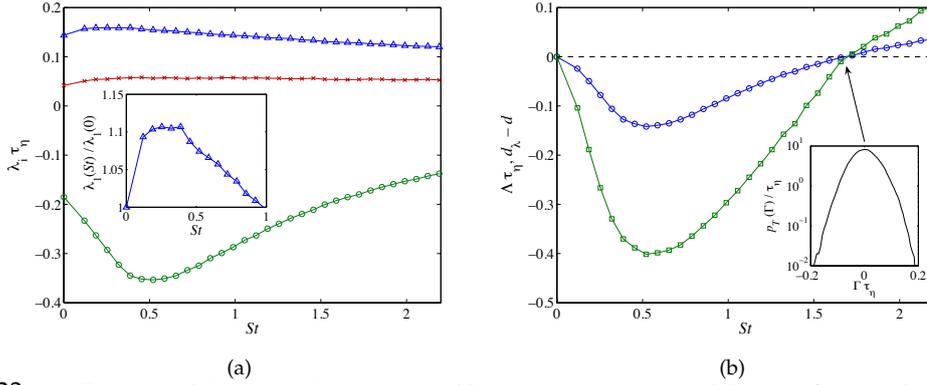


FIGURE 4.23 – (a) Exposants de Lyapunov λ_i pour $i = 1$ (bleu), $i = 2$ (rouge) et $i = 3$ (vert) en fonction du nombre de Stokes pour $R_\lambda = 185$. Encart : accroissement relatif $\lambda_1(St)/\lambda_1(0)$ qui a lieu aux petites valeurs de St . (b) Dimension de Lyapunov d_λ (vert) et taux d'accroissement des volumes $\Lambda = \sum_{i=1}^3 \lambda_i$ (bleu) en fonction du nombre de Stokes ($R_\lambda = 185$). Encart : distribution de probabilité du taux d'accroissement des volumes à temps fini $\Gamma(T)$ pour $T \approx 80 \tau_\eta$.

chaoticité est affectée par l'inertie, deux mécanismes doivent être pris en compte. D'abord, les particules ont un retard sur le mouvement du fluide. Cela signifie que leur vitesse est de façon approchée celle des traceurs filtrée sur les échelles temporelles plus grandes que τ . Cette effet affaiblit la chaoticité. En même temps, les particules lourdes sont éjectées des structures persistantes en rotation et se concentrent dans les zones de fort cisaillement. Puisque ces régions de l'écoulement sont caractérisées par des taux d'étirement plus forts, la chaoticité des trajectoires de particules est augmentée par rapport à celle de traceurs qui visitent de façon homogène toutes les régions de l'écoulement. Comme cela est souligné dans l'encart de la Fig. 4.23(a), ce second effet est dominant pour $St < 1$ où l'on observe que λ_1 est plus grand que l'exposant de Lyapunov des traceurs ($St = 0$). Ce phénomène est absent des situations où les particules sont transportées par un écoulement aléatoire décorrélé en temps (cf. section 3.2.2). En revanche, pour les nombres de Stokes suffisamment élevés, l'exposant de Lyapunov décroît : la concentration préférentielle devient négligeable et l'effet de filtrage temporel domine. Notons que nous avons vu dans la section 2.1.1 que la compétition entre concentration préférentielle et filtrage est aussi présente dans les statistiques de l'accélération des particules.

Comme cela peut être observé sur la Fig. 4.23(a), l'évolution des surfaces infinitésimales est elle aussi influencée par ces deux mécanismes. En effet, lorsque St varie, le second exposant de Lyapunov λ_2 montre un comportement qualitatif similaire à celui de λ_1 . Pour les traceurs ($St = 0$), l'incompressibilité de l'écoulement implique que $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$. Vu que pour une dynamique réversible en temps on a $\lambda_2 = 0$, le rapport λ_2/λ_1 est une mesure de l'irréversibilité de la dynamique. Les simulations à des nombres de Reynolds modérés de [GP90] indiquaient que $\lambda_2/\lambda_1 \simeq 0.25$; nous trouvons dans nos simulations $\lambda_2/\lambda_1 = (0.28 \pm 0.02)$. Cette irréversibilité provient du fait que les équations de Navier–Stokes ne sont pas réversibles en temps. Toutefois, elle semble ne pas dépendre très fortement du nombre de Reynolds et on s'attend donc à ce qu'elle persiste dans la limite $R_\lambda \rightarrow \infty$ en conséquence de la présence d'une anomalie dissipative.

Le comportement de λ_3 en fonction de St est assez différent de celui des deux premiers exposants. À cause de la nature dissipative de la dynamique des particules, les volumes de l'espace des phases ne sont pas conservés. En effet le taux de croissance des volumes de l'espace physique, défini comme $\Lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$ et qui s'annule pour les traceurs du fluide, est négatif pour tous les nombres de Stokes tels que $0 < St \lesssim 1.72$ (voir Fig. 4.23(b)). Cela signifie que tous les volumes de l'espace physique se contractent vers zéro aux temps logs. Cette concentration, qui se produit à des échelles plus petites que η , est, comme nous l'avons vu dans la section 1.1.2, une conséquence de la convergence des trajectoires de particules vers un attracteur dynamique fractal. Rappelons que la dimension de Lyapunov de l'attracteur (ou de Kaplan–Yorke, cf. section 1.1.1) est définie comme $d_\lambda = J + \sum_{i=1}^J \lambda_i/|\lambda_{J+1}|$ où J est le plus grand entier tel que $\sum_{i=1}^J \lambda_i > 0$. Elle est représentée sur la Fig. 4.23(b) en fonction de St . Le minimum en $St \approx 0.5$ correspond à une concentration maximale. Pour $St \gtrsim 1.72$, la dimension de Lyapunov devient plus grande que $d = 3$, ce qui indique que la distribution spatiale des particules n'est plus fractale. Pour $St \approx 1.72$, le taux de croissance Λ des volumes de l'espace physique s'annule, ce qui signifie dans ce cas que la dynamique des particules conserve en moyenne les volumes. Toutefois, le taux de croissance à temps fini $\Gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ subit lui de fortes fluctuations, comme on peut le voir dans l'encart de la Fig. 4.23(b). Ceci a pour conséquence que des fluctuations locales fortes sont présentes dans la distribution des particules, même aux valeurs élevées du nombre de Stokes.

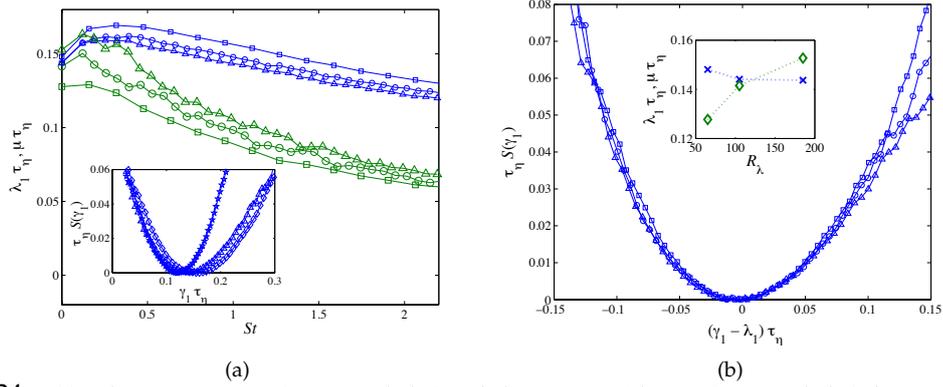


FIGURE 4.24 – (a) Valeur moyenne λ_1 (petits symboles) et de la variance réduite μ (gros symboles) des taux d'étirement en fonction du nombre de Stokes, pour $R_\lambda = 65$ (carrés), $R_\lambda = 105$ (cercles) et $R_\lambda = 185$ (triangles). Encarts : fonction de taux $S(\gamma_1)$ pour $R_\lambda = 185$ et différentes valeurs du nombre de Stokes : $St = 0$ (triangles), $St = 0.32$ (losanges) et $St = 2.19$ (étoiles). (b) Fonction de taux $S(\gamma_1)$ des traceurs pour $R_\lambda = 65$ (carrés), 105 (cercles) et 185 (triangles). Encart : exposant de Lyapunov λ_1 (croix bleues) et variance réduite $\mu = T\sigma^2$ (losanges verts) en fonction de R_λ .

Nous en venons maintenant à l'étude de la dépendance des exposants de Lyapunov en fonction du nombre de Reynolds de l'écoulement. L'encart de la Fig. 4.24(b) représente le plus grand exposant de Lyapunov pour les traceurs ($St = 0$) en fonction de R_λ . Vu que λ_1 est une quantité turbulente à petite échelle avec la dimension de l'inverse d'un temps, on s'attend à ce que $\lambda_1 \tau_\eta \simeq const$ et donc que $\lambda_1 \propto R_\lambda$. Toutefois, les fluctuations intermittentes des gradients de vitesse permettent de prédire une dépendance anormale en fonction du nombre de Reynolds $\lambda_1 \propto R_\lambda^\alpha$ avec $\alpha < 1$ [CJVP93]. Ceci implique que $\lambda_1 \tau_\eta$ décroît avec le nombre de Reynolds, comme cela est effectivement confirmé par nos simulations.

On s'attend en fait à ce que l'intermittence affecte l'ensemble de la distribution de probabilité du plus grand taux d'étirement $\gamma_1(T)$. Comme cela est expliqué dans la section 1.1.1, on s'attend à ce que la distribution de $\gamma_1(T)$ suive pour les temps T suffisamment grands, un principe de grandes déviations, c'est-à-dire $p_T(\gamma_1) \propto \exp(-T S(\gamma_1))$. La fonction de taux $S(\gamma_1)$ est positive, convexe et s'annule à son minimum atteint en $\gamma_1 = \lambda_1$. Les petites fluctuations qui se produisent lorsque $|\gamma_1 - \lambda_1| \ll T^{-1/2}$ sont décrites par le théorème de la limite centrale qui consiste à approcher $S(\cdot)$ par une parabole au voisinage de son minimum. L'effet de l'intermittence sur ces petites fluctuations peut être mesuré par la variance $\sigma^2 \equiv \langle (\gamma_1 - \lambda_1)^2 \rangle$ du taux d'étirement, ou plus spécifiquement par la variance réduite $\mu = T\sigma^2$ qui mesure la courbure de la fonction de taux à son minimum. Comme cela est prédit dans [CJVP93], l'intermittence est responsable d'une dépendance anormale de μ en fonction du nombre de Reynolds. En particulier, on s'attend à ce que $\mu \tau_\eta$ croisse comme R_λ . Cette tendance est confirmée qualitativement par les données représentées dans l'encart de la Fig. 4.24(b). La signature de l'intermittence sur les statistiques d'ordre plus élevé de γ_1 peut difficilement être mesurée de façon fiable. En effet, comme cela peut être vu sur la Fig. 4.24(b), les fonctions de taux de γ_1 associées aux trois valeurs de R_λ que nous avons considérées, une fois centrées et normalisées, se superposent presque pour des fluctuations allant jusqu'à 3σ . Il est toutefois possible d'observer une déviation systématique par rapport à une distribution normale. À cause de l'incompressibilité, la queue gauche est bornée par la contrainte $\gamma_1 > 0$ et doit donc décroître plus rapidement qu'une gaussienne, comme cela est effectivement observé. La partie droite de la distribution est elle liée aux gradients forts de la vitesse. Ces événements conduisent apparemment à une queue plus élargie qu'une gaussienne. L'intermittence de la turbulence devrait ainsi essentiellement affecter la distribution des taux plus grands que l'exposant de Lyapunov.

Pour les particules inertielles, les corrections intermittentes agissent dans la même direction que les traceurs. La figure 4.24(a) représente le comportement de λ_1 et de la variance réduite μ en fonction du nombre de Stokes pour les différents nombres de Reynolds. Comme pour les traceurs, pour une valeur fixée de St , le produit $\lambda_1 \tau_\eta$ décroît et $\mu \tau_\eta$ augmente avec R_λ . L'encart de la Fig. 4.24(a) montre, pour $R_\lambda = 185$, la fonction de taux de $\gamma_1(T)$ à la fois pour les traceurs et pour les particules associées à trois valeurs différentes de St . Pour $St < 1$, l'ensemble de la distribution se translate vers les valeurs plus grandes, ce qui signale l'augmentation de la chaoticité. Pour $St > 1$, la distribution des taux d'étirement se translate vers les valeurs plus petites et en même temps, les fluctuations deviennent de moins en moins probables. L'asymétrie qui était observée pour les traceurs décroît avec l'inertie. Aux plus grandes valeurs de St que nous avons considéré, la fonction de taux de γ_1 devient indiscernable d'une parabole. Finalement, il peut être utile de mentionner que la dépendance en nombre de Reynolds

est moins significative pour le taux de croissance Λ des volumes. L’intermittence n’affecte que faiblement les propriétés de concentration des particules. Une compréhension plus détaillée de ce problème nécessiterait de plus grandes valeurs du nombre de Reynolds avec des statistiques temporelles plus longues. Cela représenterait un investissement assez lourd vu qu’il faudrait intégrer la dynamique tangente le long d’un grand nombre de trajectoires.

4.2.2 Effet de l’inertie sur la dispersion aux échelles inertielles

Comme nous l’avons vu dans la section 4.1, la dispersion turbulente de paires de traceurs se base classiquement sur l’application de la théorie de similarité pour les statistiques eulériennes de la vitesse. Selon les échelles de temps et d’espace considérées, les incréments de vitesse influent différemment sur la façon dont les traceurs se séparent. Cela conduit à différencier différents cas selon que les séparations soient aux échelles dissipatives ou bien dans la gamme inertielle et, dans ce dernier cas, à distinguer un régime balistique de Batchelor et une séparation explosive de Richardson–Obukhov. Dans le cas des particules inertielles, de tels raisonnements restent valables et, ainsi, la séparation temporelle des trajectoires est fortement influencée par les statistiques stationnaires de leurs différences de vitesse.

Considérations phénoménologiques et observations numériques

Nous avons vu dans les sections 3.2 et 3.3 du Chapitre précédent que pour décrire les différences de vitesse entre particules aux échelles inertielles, il est utile d’introduire le nombre de Stokes local $St(R)$ dépendant de l’échelle d’observation R . Il est défini comme le rapport entre le temps de réponse τ des particules et le temps caractéristique du fluide τ_R associé à R . Aux échelles dissipatives, lorsque $R \ll \eta$, on a $\tau_R = \tau_\eta$ et on retrouve la définition classique du nombre de Stokes $St(R) = St = \tau/\tau_\eta$. Pour $R \gg \eta$, le temps caractéristique du fluide est donné par le temps de retournement et donc $St(R) \simeq \tau \varepsilon^{1/3} R^{-2/3}$. Le comportement typique de $St(R)$ est schématisé sur la Fig. 4.2.2 pour deux valeurs différentes du nombre de Stokes. Lorsque le nombre de Stokes aux échelles dissipatives St est de l’ordre de l’unité ou plus grand, il existe une échelle $R^*(St) = \eta St^{3/2}$ pour laquelle le nombre de Stokes local est de l’ordre de l’unité. Une telle échelle, qui se trouve dans la gamme inertielle pour $St \gg 1$ donne une estimation grossière de la distance maximale où l’inertie joue un rôle important dans la dynamique des particules. Nous nous attendons à ce que la caractérisation des différences de vitesse entre particules $\delta_R V_{St}$ en fonction de celles des traceurs fasse intervenir deux propriétés importantes. D’une part, nous avons vu dans la section 3.3 qu’aux petites échelles $R \ll \eta$ et pour les nombres de Stokes suffisamment grands, tout se passe comme si la vitesse des particules n’était pas différentiable et que $\delta_R V_{St} \sim V_{St}^\eta (R/\eta)^{\gamma(St)}$ où V_{St}^η est un pré-facteur constant et la fonction $\gamma(St)$ est en quelque sorte l’exposant de Hölder de la vitesse des particules. Le comportement typique de γ est représenté sur le tableau de droite de la Fig. 4.2.2. D’autre part, aux échelles plus grandes que $R^*(St)$ mais plus petites que l’échelle intégrale, nous nous attendons à ce que l’inertie devienne de plus en plus faible et que les différences de vitesse entre particules s’approchent des incréments du fluide : $\delta_R V_{St} \rightarrow V_{St}^0 \delta_R u \sim V_{St}^0 U_0 (R/L)^{1/3}$, où U_0 est la vitesse du fluide à grande échelle et pour des raisons de simplicité, nous avons négligé les corrections intermittentes aux propriétés d’échelle K41. Clairement, le nombre de Reynolds doit être suffisamment grand pour garantir la séparation d’échelle $R^*(St) \ll R \ll L$. Nous avons introduit ci-dessus un facteur de normalisation sans dimension V_{St}^0 pour prendre en compte les effets de filtrage induits par l’inertie aux grandes échelles. La normalisation est telle que $V_{St=0}^0 = 1$ alors que pour tout nombre de Stokes positif $V_{St}^0 \leq 1$.

Pour complètement caractériser les différences de vitesse entre particules, on peut remarquer que l’échelle $R^*(St)$ est associée à une vitesse caractéristique $\delta u^*(St) \sim \delta_{R^*} u$ (voir en haut à gauche sur la Fig. 4.2.2). Ceci conduit à proposer la formule d’interpolation suivante :

$$\delta_R V_{St} = V_{St}^0 (\delta_R u)^{\gamma(St(R))} [(\delta_R u)^2 + c_1 (\delta u^*(St))^2]^{[1-\gamma(St(R))]/2}. \quad (4.19)$$

Il s’agit d’une paramétrisation de type « Batchelor » souvent utilisée pour les incréments de vitesse eulériens [Men96], mais cette fois-ci dans l’espace des vitesses avec une transition en $\delta u^*(St)$. Une fois connue la fonction de normalisation à grande échelle V_{St}^0 , l’exposant associé aux caustiques $\gamma(x)$ et les incréments de vitesse du fluide $\delta_R u$, la formule n’a qu’un paramètre, c_1 , dont les valeurs dépendent du nombre de Stokes. Nous comparons sur la Fig. 4.26(a) les résultats de cette formule d’interpolation et les données numériques obtenue pour des simulations numériques directes au nombre de Reynolds $R_\lambda \approx 400$ (voir [BBL⁺10] pour plus de détails sur les simulations). L’exposant de Hölder a ici été approché par $\gamma(x) = [1 - (2/\pi) \operatorname{atan}(x)]$. Les comportements qualitatifs sont assez bien reproduits par la formule

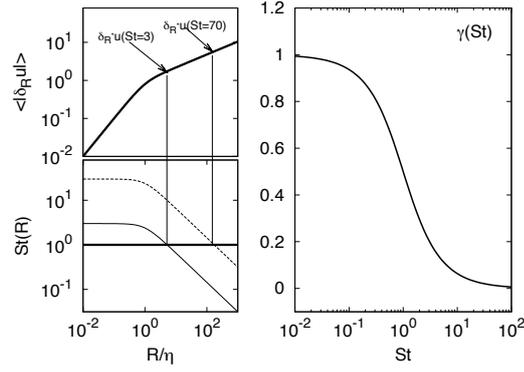


FIGURE 4.25 – En bas à gauche : comportement typique du nombre de Stokes local $St(R)$ en fonction de l'échelle R pour deux nombres de Stokes à petite échelle $St = 3$ et 70 . En haut : variations des différences de vitesse entre traceurs en fonction de l'échelle. À droite : exposant $\gamma(St)$ obtenu par une approximation des données.

(4.19). En particulier, on retrouve les comportements limites aux petites et grandes séparations. Dans le premier cas, l'inertie domine et on obtient le comportement purement algébrique

$$\delta_R V_{St} \sim (\delta_R u) \gamma(St) \sim V_{St}^0 \left(\frac{R}{L} \right)^{\gamma(St)} ; \quad R \ll \eta, \quad (4.20)$$

où le nombre de Stokes local a atteint sa limite dissipative $St(R) \rightarrow St$. Dans la seconde asymptotique, les différences de vitesse entre particules sont données par les incréments du fluide

$$\delta_R V_{St} \sim V_{St}^0 \delta_R u ; \quad \eta \ll R^*(St) \ll R. \quad (4.21)$$

Dans l'asymptotique intermédiaire qui apparaît lorsque $St \gg 1$, l'inertie donne une dépendance non-triviale en l'échelle et on a

$$\delta_R V_{St} \sim (\delta_R u) \gamma(St(R)) \sim R^{\gamma(St(R))/3} ; \quad \eta \ll R \ll R^*(St). \quad (4.22)$$

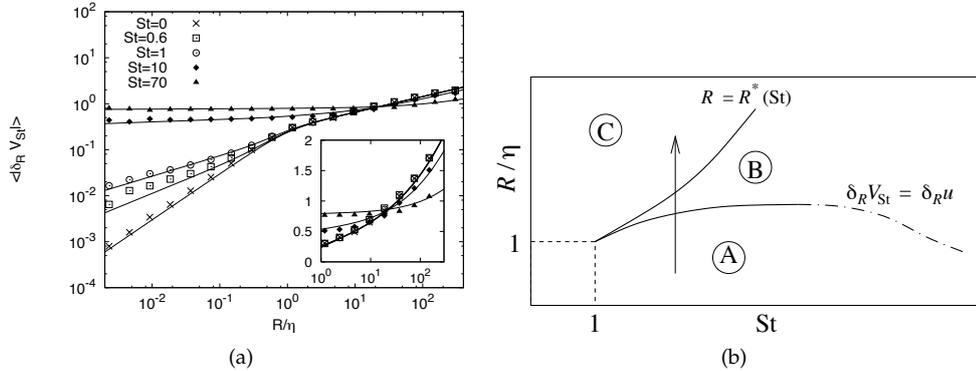


FIGURE 4.26 – (a) Propriétés d'échelle de la fonction de structure d'ordre un des particules (symboles) pour $R_\lambda \approx 400$; les lignes continues sont obtenues par la formule d'interpolation (4.19). Encart : zoom autour de la zone $\delta_R u \sim \delta_R V$ (b) Schéma des différents régimes dans l'espace des paramètres (St, R) , séparés par les courbes $R = R^*(St)$ et $\delta_R V_{St} = \delta_R u$. Pour une valeur de St , la dispersion relative d'une paire de particule initialement à une séparation R donnée évolue vers le haut selon la flèche verticale.

Ainsi, ces considérations nous poussent à proposer que lorsque l'on varie les nombres de Reynolds, de Stokes et la séparation R entre les particules, différents régimes apparaissent. Leur pertinence pour le problème de la dispersion relative de particules inertielles peut être aisément compris à partir du diagramme schématique de la Fig. 4.26(b). Dans l'espace des paramètres (St, R) défini par l'inertie et la distance entre les particules, on peut distinguer trois régions selon que l'inertie soit forte ($St(R) > 1$) ou faible ($St(R) < 1$) et que les différences de vitesses entre les particules soient ou non plus grandes que celles du fluide à une séparation comparable. Le régime (A) est tel que l'inertie est importante puisque $R \ll R^*(St) \gg \eta$; aussi, les différences de vitesses typiques sont plus importantes que celles du fluide. Dans la région (B), l'inertie est toujours importante mais les vitesses sont elles plus faibles pour les

particules que pour les traceurs. Ce régime apparaît aux nombres de Stokes suffisamment élevés. Le régime © se caractérise par un effet faible de l’inertie qui ne se matérialise que dans l’effet de filtrage et donc dans la vitesse à grande échelle des particules.

On s’intéresse maintenant aux effets de l’inertie sur l’évolution de la distance carrée moyenne $\langle R^2(t) | R(0) = r_0 \rangle_{St}$ entre deux particules qui sont initialement à une distance r_0 . La notation $\langle \cdot \rangle_{St}$ est choisie ici pour souligner le fait que les moyennes sont sur toutes les paires de particules avec un nombre de Stokes St . D’après l’analyse que nous avons effectuée ci-dessus, les différents régimes de la dynamique des particules vont apparaître ou non selon le choix de la séparation initiale r_0 . Par exemple lorsque $r_0 \gtrsim R^*(St)$, les particules sont initialement dans le régime © et l’inertie ne joue aucun rôle. La distance carrée moyenne entre les particules va suivre un comportement similaire à celle entre deux traceurs caractérisée par un régime balistique pendant lequel elle croît comme t^2 suivi du régime explosif de Richardson–Obukhov où elle est $\propto t^3$ (voir section 4.1.1). Aux nombres de Stokes modérés et pour des séparations initiales assez faibles, on démarre dans le régime Ⓐ mais il n’y a pas assez de séparation d’échelle pour que le régime Ⓑ ait un impact. Initialement, les différences de vitesse sont bien plus fortes que les traceurs et le régime balistique est modifié. Toutefois, les particules se séparent très vite et rejoignent la région © et la dispersion devient indiscernable de celle des traceurs. Dans ce cas, l’impact de l’inertie n’est donc visible qu’aux temps courts. Finalement, c’est pour les particules avec des temps de réponse loin dans les échelles inertielle et pour des séparations dans la région Ⓐ que les effets de l’inertie sont les plus marqués. Leurs distances atteignent $R \sim R^*(St)$ une fois que la différence de vitesse initiale relativement large est devenue plus petite que celle du fluide (ce qui correspond au passage de Ⓐ à Ⓑ). Ensuite, aux échelles $R > R^*(St)$, les incréments de vitesse des particules restent bien plus petits que ceux du fluide, ce qui conduit à un affaiblissement de la dispersion relative induite par le frottement visqueux. Il est clair que c’est pour un tel choix des paramètres, et notamment pour ce qui se passe dans la région Ⓑ que l’on s’attend à de nouveaux effets physiques ; il a notamment été prédit dans [FH08] qu’une nouvelle loi en t^9 pour la distance moyenne entre les particules devrait être présente. Malheureusement la présence d’une telle région est très coûteuse pour les simulations numériques, vu qu’elle requiert un nombre de Reynolds suffisamment grand pour avoir $\eta \ll R^*(St) \ll L$.

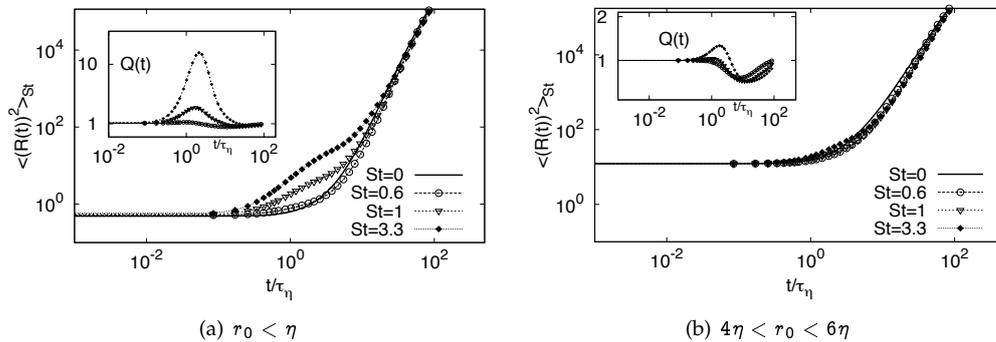


FIGURE 4.27 – Évolution temporelle de la distance moyenne carrée entre particules avec différents nombres de Stokes pour deux séparations initiales différentes. Encarts : rapport $Q(t)$ entre la séparation carrée des particules inertielles et celle des traceurs pour les mêmes données. Ici $R_\lambda \simeq 200$

La figure 4.27 représente l’évolution temporelle de la séparation carrée entre les particules pour différentes valeurs du nombre de Stokes et deux valeurs distinctes de la séparation initiale. Nous utilisons ici les résultats de simulations numériques directes à $R_\lambda \simeq 200$ et commençons par regarder le cas de nombres de Stokes modérés $St \sim \mathcal{O}(1)$. Les distances initiales ont été choisies telles que $r_0 \leq \eta$ (a) et $4\eta \leq r_0 \leq 6\eta$ (b). Pour des distances initiales suffisamment petites (Fig. 4.27(a)), la présence de caustiques dans le champ de vitesse initial des particules donne une déviation assez forte du comportement des traceurs. Lorsque l’on augmente le nombre de Stokes, cet effet devient de plus en plus marqué et perdure pour un temps de plus en plus grand. Pour la plus grande valeur du nombre de Stokes considérée ($St = 3.3$), une différence significative peut être détectée sur près de deux décades pour $1/10 \leq t/\tau_\eta \leq 10$. Ces déviations peuvent être appréhendées de façon plus quantitative lorsque l’on normalise la séparation carrée moyenne des particules par celle des traceurs en introduisant

$$Q(t) = \frac{\langle R^2(t) \rangle_{St}}{\langle R^2(t) \rangle_{St=0}}. \quad (4.23)$$

Cette quantité est représentée en encart sur la Fig. 4.27. Pour les paires dont le nombre de Stokes est $St = 3.3$ et la séparation initiale $r_0 \leq \eta$, ce rapport dépasse 10 à son maximum à $t \sim \tau_\eta$. Toutefois, de

tels effets deviennent de moins en moins importants lorsque les séparations initiales sont choisies plus grandes, comme cela est montré sur la Fig. 4.27(b) pour les mêmes valeurs du nombre de Stokes. Ceci est dû à un effet moindre des caustiques à ces échelles plus grandes. À ces nombres de Stokes, la longueur caractéristique des caustiques est plus petite que r_0 et donc que les particules se séparent dès le début comme des traceurs. Les deux situations montrées pour $St = 3.3$ sur les Figs. 4.27(a) et (b) correspondent respectivement à des choix de r_0 dans la région (A) ou (C) de la Fig. 4.26(b). Aux temps plus longs, et dans tous les cas considérés, la séparation des particules se rapproche finalement du régime superdiffusif de Richardson–Obukhov.

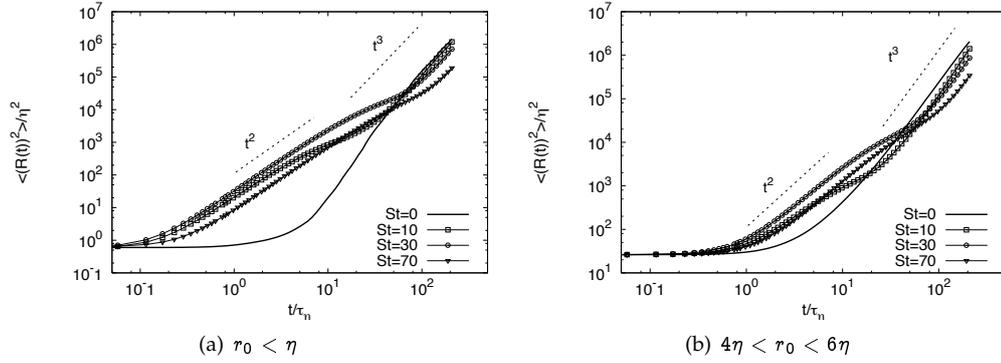


FIGURE 4.28 – Évolution temporelle de la distance carrée moyenne entre particules associées à $St = 10, 30$ et 70 pour $R_\lambda = 400$ pour deux valeurs différentes de la séparation initiale r_0 .

Considérons maintenant ce qui se passe aux nombres de Stokes plus grands. La figure 4.28 représente l'évolution de la distance carrée moyenne pour $St = 10, 30, 70$ et pour deux séparations initiales différentes dans le cas $Re_\lambda \simeq 400$. Comme on peut le voir pour la plus grande valeur du nombre de Stokes, on ne converge jamais vers les traceurs. Le régime transitoire dominé par les caustiques s'étend sur l'ensemble de la gamme inertielle. Vu que les particules ont besoin d'un temps très long pour relaxer vers le fluide, elles se séparent longtemps selon un régime balistique $\propto t^2$.

Approche champ moyen et relaxation vers Richardson

La dispersion relative des traceurs peut être modélisée de manière phénoménologique en appliquant les lois de similarité K41 de la turbulence aux incréments de vitesse qui gouvernent la séparation (voir, par exemple, [OXBB06]). En effet, la séparation $\mathbf{R}(t)$ entre deux traceurs évolue selon

$$\dot{\mathbf{R}}(t) = \mathbf{u}(\mathbf{X}_1, t) - \mathbf{u}(\mathbf{X}_2, t) = \delta_R \mathbf{u}(\mathbf{R}, t), \quad (4.24)$$

avec la condition initiale $\mathbf{R}(0) = \mathbf{r}_0$. On peut ainsi écrire une équation pour la racine carrée de la séparation carrée moyenne $r(t) \equiv \langle |\mathbf{R}(t)|^2 | r_0 \rangle^{1/2}$ conditionnée sur la séparation initiale $|\mathbf{R}(0)| = r_0$:

$$\dot{r} = \frac{1}{r} \langle \mathbf{R}(t) \cdot \delta_R \mathbf{u}(\mathbf{R}(t), t) | r_0 \rangle, \quad \text{avec } r(0) = r_0. \quad (4.25)$$

Les corrélations lagrangiennes qui apparaissent entre la séparation entre les traceurs et l'incrément de vitesse du fluide représentent une statistique turbulente complexe sur laquelle nous n'avons aucun contrôle mais qui peut être fermée par des considérations phénoménologiques. Une approximation à l'ordre zéro consiste à factoriser les corrélations et à supposer valable la fermeture en terme de champ moyen :

$$\langle \mathbf{R}(t) \cdot \delta_R \mathbf{u}(\mathbf{R}(t), t) | r_0 \rangle \approx \langle \mathbf{R}^2 | r_0 \rangle^{1/2} \langle \dot{\mathbf{R}} \cdot \delta_R \mathbf{u} | r_0 \rangle \approx r S_2^{1/2}(r), \quad (4.26)$$

où $S_2(r)$ est la fonction de structure eulérienne d'ordre deux. Selon K41, $S_2(r) \propto (\varepsilon r)^{2/3}$, ce qui conduit à l'approximation

$$\dot{r} = C \varepsilon^{1/3} r^{1/3}, \quad \text{de telle sorte que } r(t) = \left[R_0^{2/3} + (2C/3) \varepsilon^{1/3} t \right]^{3/2}. \quad (4.27)$$

Ce modèle phénoménologique donne une image qualitative complète de l'évolution de la distance carrée moyenne entre les traceurs. Il comprend les deux régimes importants de la dispersion relative : lorsque $t \ll t_0 = (3/2C) \varepsilon^{-1/3} r_0^{2/3}$, un développement de Taylor de la solution de (4.27) donne

la séparation balistique de Batchelor $r(t) \simeq R_0 + C (\varepsilon R_0)^{1/3} t$, tandis que lorsque $t \gg t_0$, on retrouve la loi de Richardson–Obukhov $r(t) \simeq (2C/3)^{3/2} \varepsilon^{1/2} t^{3/2}$.

Dans le cas des particules inertielles, on a clairement une augmentation du nombre de degrés de liberté. La séparation entre les trajectoires évolue selon

$$\ddot{\mathbf{R}}(t) = -\frac{1}{\tau} \left[\dot{\mathbf{R}}(t) - \delta_R \mathbf{u}(\mathbf{R}, t) \right]. \quad (4.28)$$

Pour obtenir des équations de type « champ moyen », il faut modéliser à la fois la différence de vitesse des particules mais aussi celle du fluide. Pour cela, on suit le même cheminement que dans le cas des traceurs et on introduit $v(t) \equiv \langle |\dot{\mathbf{R}}(t)|^2 | r_0 \rangle^{1/2}$. On peut ensuite procéder de façon similaire à précédemment pour écrire des équations exactes pour $r(t)$ et $v(t)$:

$$\ddot{r} = \frac{1}{r} (v^2 - \dot{r}^2) - \frac{1}{\tau} \left[\dot{r} - \frac{1}{r} \langle \mathbf{R} \cdot \delta_R \mathbf{u} | r_0 \rangle \right], \quad (4.29)$$

$$\dot{v} = -\frac{1}{\tau} \left[v - \frac{1}{v} \langle \delta_R \mathbf{V} \cdot \delta_R \mathbf{u} | r_0 \rangle \right]. \quad (4.30)$$

Notons que la différence de vitesse $v(t)$ évolue selon une dynamique qui rappelle celle des particules. Toutefois, $v(t)$ ne coïncide pas avec la dérivée temporelle de la distance moyenne $r(t)$. Il est utile de réécrire ces équations en faisant intervenir la partie transverse w des différences de vitesse entre particules définie comme

$$\dot{r} = v - w. \quad (4.31)$$

On peut alors aussi écrire une équation exacte pour l'évolution de w

$$\dot{w} = -\frac{1}{\tau} w - (2v - w) \frac{w}{r} - \frac{1}{\tau} \left[\frac{1}{r} \langle \mathbf{R} \cdot \delta_R \mathbf{u} | r_0 \rangle - \frac{1}{v} \langle \delta_R \mathbf{V} \cdot \delta_R \mathbf{u} | r_0 \rangle \right]. \quad (4.32)$$

Bien sûr, les équations (4.30), (4.31) et (4.32) ne sont pas fermées à moins que l'on prescrive la corrélation lagrangienne entre l'évolution des particules et la différence de vitesse du fluide. Comme dans le cas des traceurs, on approche le premier terme ouvert du membre de droite de (4.32) en utilisant (4.26). Pour le terme impliquant les corrélations entre les différences de vitesse des particules et celles du fluide, on utilise

$$\langle \delta_R \mathbf{V} \cdot \delta_R \mathbf{u} \rangle \approx \langle |\delta_R \mathbf{V}|^2 \rangle^{1/2} \langle |\delta_R \mathbf{u}|^2 \rangle^{1/2} = C_1 v S_2^{1/2}(r), \quad (4.33)$$

où C_1 est une constante sans dimension. Lorsque r est aux échelles inertielles, les lois d'échelles K41 impliquent $S_2(r) \propto (\varepsilon r)^{2/3}$. Finalement, ces approximations conduisent à un système fermé pour l'évolution des séparations et vitesses moyennes r , v et w

$$\dot{r} = v - w, \quad (4.34)$$

$$\dot{v} = \frac{1}{\tau} [C \varepsilon^{1/3} r^{1/3} - v], \quad (4.35)$$

$$\dot{w} = -\frac{1}{\tau} w - (2v - w) \frac{w}{r} + \frac{1}{\tau} B \varepsilon^{1/3} r^{1/3}, \quad (4.36)$$

où les constantes positives sans dimension B et C reflètent le fait que l'on ne contrôle pas les préfacteurs dans les fermetures (4.26) et (4.33). Ce système d'équation est associé aux conditions initiales $r(0) = r_0$, $v(0) = \langle |\dot{\mathbf{R}}|^2 | |\mathbf{R}| = r_0 \rangle^{1/2}$ et $w(0) = v(0) - \langle \mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{R}} | |\mathbf{R}| = r_0 \rangle / r_0$ qui dépendent clairement des configurations de la dispersion relative qui nous intéresse. On peut noter que ce système se réduit aux équations (4.27) pour les traceurs dans la limite $\tau \rightarrow 0$.

Comme dans le cas des traceurs, cette approximation assez crue reproduit les aspects essentiels de la dispersion de particules inertielles. Sur la Fig. 4.29, sont représentés les résultats de l'intégration numérique du système (4.34)-(4.36) ainsi que les résultats des simulations numériques pour $R_\lambda \approx 400$, pour deux valeurs différentes du nombre de Stokes, à savoir $St = 10$ et $St = 70$. Notons que pour l'intégration numérique du modèle de fermeture nous avons choisi pour les constantes $B = 0$ et $C = 2$. Le choix pour B est motivé par le fait que dans la limite des petits nombres de Stokes, les deux termes apparaissant entre crochets dans (4.32) suivent les mêmes lois d'échelle et ne diffèrent que d'un facteur constant plus petit que 1. Pour les nombres de Stokes intermédiaires, les déviations se produisent essentiellement pour les échelles dissipatives. Toutefois, ceci n'affecte que marginalement la qualité de l'approximation. Le coefficient C doit être choisi positif et de l'ordre de un, puisque déjà dans la limite

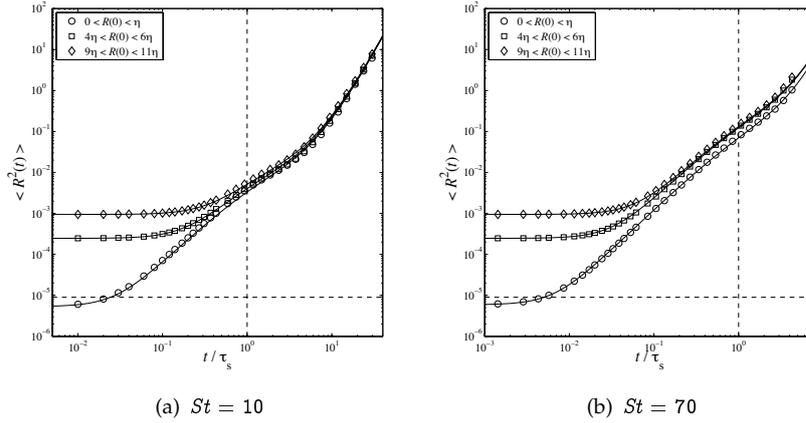


FIGURE 4.29 – Évolution de la distance carrée moyenne pour $R_\lambda \approx 400$ et les nombres de Stokes (a) $St = 10$ et (b) $St = 70$ pour différentes valeurs de la donnée initiale r_0 . Les symboles sont les résultats des simulations numériques et les lignes du modèle champ-moyen. L'axe des temps a ici été adimensionné par le temps de réponse τ .

des traceurs, il y a une corrélation non nulle entre la séparation et l'incrément de vitesse du fluide à cause du conditionnement sur les distances initiales.

Malgré sa simplicité, le modèle champ-moyen décrit ci-dessus est capable de reproduire la dispersion de paires de particules avec des séparations initiales aux échelles inertielles de la turbulence. Il est légitime de se demander s'il est possible d'obtenir une image qualitative encore plus simple de ce problème. Pour cela, nous considérons des particules dont le nombre de Stokes est modérément grand et pour lesquelles l'inertie joue un rôle important dans les transitoires initiaux et le comportement de Richardson n'est rejoint qu'aux temps très longs. Pour simplifier, on suppose que l'échelle où les vitesses du fluide et des particules deviennent du même ordre et l'échelle $R^*(St)$ pour laquelle l'inertie cesse d'être importante sont très proches l'une de l'autre (tel que le régime \textcircled{B} est quasiment absent). Comme cela est illustré sur la Fig. 4.26(b), cette hypothèse ne peut être tout le temps valable à cause de l'effet du facteur de normalisation V_{St}^0 pour $St \gg 1$.

L'idée générale est alors la suivante. Les particules se séparent initialement de façon balistique pendant un temps de l'ordre (ou plus grand) que celui nécessaire à leur grande vitesse initiale, dominée par les caustiques, pour relaxer vers la vitesse du fluide. Après cet instant, les particules se comportent comme des traceurs et s'approchent d'un comportement proche de la séparation explosive de Richardson–Obukhov. Ceci est une approximation assez crue, vu que (i) l'écoulement du fluide est en fait corrélé à la dynamique des particules dès les temps les plus courts et (ii) les effets de l'inertie sont présents jusqu'aux temps les plus longs, comme nous l'avons observé précédemment. Toutefois, une telle approximation devrait correctement donner les deux comportements asymptotiques aux petits et aux grands temps. Comme nous considérons des valeurs modérées du nombre de Stokes, la vitesse initiale des particules peut être considérée comme bien plus grande que celle du fluide, c'est-à-dire $|\dot{\mathbf{R}}| \gg |\delta_R \mathbf{u}|$. Sous ces hypothèses, il existe un intervalle de temps initial pendant lequel $\dot{\mathbf{R}} \approx -(\dot{\mathbf{R}})/\tau$ [voir (4.30)], et donc $\dot{\mathbf{R}}(t) \simeq \dot{\mathbf{R}}(0) \exp(-t/\tau)$. Ainsi, la séparation moyenne carrée évolue initialement comme

$$\langle |\mathbf{R}(t)|^2 | r_0 \rangle = R_0^2 + \tau^2 \langle |\dot{\mathbf{R}}(0)|^2 \rangle \left(1 - e^{-t/\tau} \right)^2. \quad (4.37)$$

Ceci devrait être valide jusqu'à des temps aux échelles inertielles tels que $|\dot{\mathbf{R}}| \sim |\delta_R \mathbf{u}| \sim (\varepsilon R)^{1/3}$. On peut aisément voir que cette échelle de temps est de l'ordre de τ . Aux temps plus longs, les effets de l'inertie deviennent sous-dominants et la dispersion de Richardson devient soudainement synchronisée à celle des traceurs. Toutefois, ce régime de Richardson n'a commencé qu'une fois que la relaxation ci-dessus s'est terminée, ce qui signifie à des distances bien plus grandes que la séparation initiale r_0 . La combinaison de cette relaxation exponentielle initiale des particules avec des nombres de Stokes modérément grands et, plus tard, vers la séparation explosive de Richardson–Obukhov sont les propriétés principales affectées par l'inertie. Ceci est en effet confirmé sur la Fig. (4.30(a)), où les données des simulations sont comparées avec les deux régimes phénoménologiques décrits ci-dessus. Comme on le voit les tendances qualitatives aux petits et grands temps sont assez bien reproduites.

Nous nous intéressons maintenant à la relaxation vers le régime explosif de Richardson–Obukhov et cherchons notamment à comprendre les termes sous-dominants dus à l'inertie. Pour cela, on suppose que dans l'équation du champ moyen (4.35), le terme provenant de la différence de vitesse du fluide

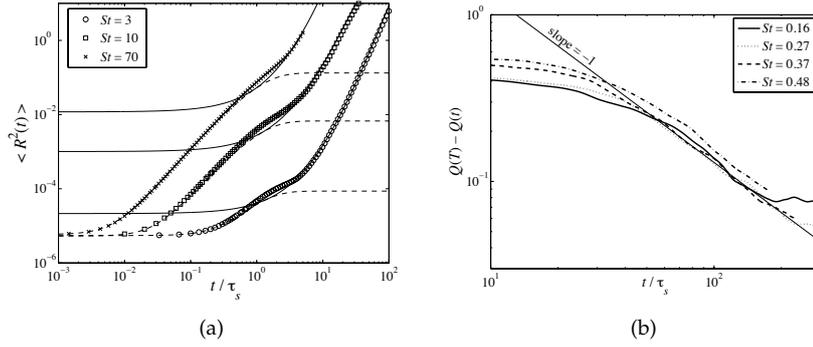


FIGURE 4.30 – (a) Évolution de la séparation carrée moyenne pour trois valeurs différentes de St et $R_\lambda \approx 400$. Le temps est normalisé par le temps de réponse τ . Les lignes en tirets représentent le régime initial balistique avec une relaxation exponentielle de la vitesse (4.37) et les lignes continues sont le régime de Richardson. (b) Comportement aux temps longs de la séparation carrée moyenne normalisée à celle des traceurs définie par (4.23) pour $R_\lambda \approx 200$. Les déviations au comportement des traceurs se comportent comme $(t/\tau)^{-1}$. Une valeur limite $Q(T)$ différente de 1 a été choisie car les effets de l'inertie sont toujours présents aux plus grandes échelles de l'écoulement.

$C\varepsilon^{1/3}r^{1/3}$ est bien plus grand que le terme d'inertie $\tau\dot{v}$. Cela est vrai lorsque $St(r) \ll 1$, c'est-à-dire aux temps t tels que $r(t) \gg R^*(St)$. Dans cette asymptotique, la composante transverse de la vitesse w est bien plus petite que la vitesse totale v , de telle sorte que $\dot{r} \simeq v$. Dans le même esprit que les développements de la vitesse des particules dans l'asymptotique des faibles inerties (voir [Max87]), on écrit un développement de Taylor de (4.35) pour obtenir

$$\dot{r} \approx v \approx C\varepsilon^{1/3}r^{1/3} - \tau \langle |(\mathrm{d}/\mathrm{d}t) \delta_r \mathbf{u}|^2 \rangle^{1/2} \approx C\varepsilon^{1/3}r^{1/3} - \tau \langle |\delta_r \mathbf{a}|^2 \rangle^{1/2}, \quad (4.38)$$

où $\delta_r \mathbf{a} = \delta_r(\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u})$ désigne l'incrément de l'accélération du fluide sur une séparation r . En supposant ensuite l'invariance d'échelle du champ turbulent d'accélération, qui selon K41 conduit à $|\delta_r \mathbf{a}| \sim \varepsilon^{2/3}r^{-1/3}$, on obtient

$$\dot{r} = C\varepsilon^{1/3}r^{1/3} \left(1 - A\tau\varepsilon^{1/3}r^{-2/3}\right) = C\varepsilon^{1/3}r^{1/3} (1 - ASt(r)), \quad (4.39)$$

où A est une constante de l'ordre de un. La condition initiale est donnée en fixant de façon arbitraire une séparation initiale $r(0) = r'_0$ choisie telle que $St(r'_0) \ll 1$. On peut alors intégrer de façon perturbative la dynamique en termes du petit paramètre $St(r'_0)$ et en développant la séparation comme $r(t) = \rho_0(t) + \rho_1(t) + \rho_2(t) + \dots$. Le terme dominant est $\rho_0(t) = [r_0'^{2/3} + (2C/3)\varepsilon^{1/3}t]^{3/2}$ et correspond à la dispersion relative des paires de traceurs. Les corrections du premier ordre s'écrivent $\rho_1(t) = -\tau\varepsilon^{1/3}A \ln(\rho_0(t)/r'_0) \rho_0^{1/3}(t)$. Aux temps bien plus longs que le temps de Batchelor associé à la séparation initiale r'_0 , c'est-à-dire pour $t \gg \varepsilon^{-1/3}r_0'^{2/3}$, le terme dominant suit la loi explosive $\rho_0(t) \simeq (2C/3)^{3/2}\varepsilon^{1/2}t^{3/2}$. Ceci implique finalement qu'aux temps suffisamment longs, on peut écrire

$$r^2(t) = \langle |\mathbf{R}(t)|^2 | r_0 \rangle \propto g\varepsilon t^3 \left[1 - D(t/\tau)^{-1} \ln(t/\tau)\right], \quad (4.40)$$

où g est la constante de Richardson introduite dans la section 4.1 et D est un facteur de l'ordre de l'unité qui ne dépend ni du nombre de Stokes, ni de la séparation initiale entre les particules.

Ce comportement est confirmé numériquement, comme on le voit sur la Fig. 4.30(b) qui donne le comportement aux temps longs du rapport $Q(t)$, défini dans (4.23), entre la séparation carrée moyenne des particules et celle des traceurs. On observe que les données convergent vers un comportement $\propto 1/t$ confirmant la prediction (4.40). À noter que nous n'avons ici représenté que les données associées à $R_\lambda \approx 200$. Pour le nombre de Reynolds plus élevé que nous avons étudié ($R_\lambda \approx 400$), nous disposons de moins de statistiques. Les données reproduisent qualitativement le même comportement mais avec un niveau de bruit bien plus élevé.

Pour conclure, il est important de remarquer que nous avons utilisé des propriétés d'échelle K41 pour le champ d'accélération (et donc pour le gradient de la pression). Toutefois, comme nous l'avons vu dans la section 1.2.2, on s'attend à ce que pour des nombres de Reynolds modérés (comme ici $R_\lambda \simeq 200$), ces propriétés d'échelle soient dominées par l'advection par les grandes échelles, de telle sorte que $|\delta_r \mathbf{a}| \sim u_{\mathrm{rms}} \varepsilon^{1/3}r^{-2/3}$. On peut aisément vérifier que cette loi d'échelle différente conduit à un comportement similaire à (4.40), excepté que cette fois, les corrections logarithmiques sont absentes et la constante sans dimension D dépend du nombre de Reynolds. Les données numériques actuelles ne permettent pas de distinguer entre ces deux régimes.

Conclusions et Perspectives

Mes perspectives scientifiques portent pour l'essentiel sur l'applications des travaux résumés dans ce mémoire à différents problèmes que l'on rencontre en physique de l'atmosphère et pour lesquelles les fluctuations induites par le transport turbulent jouent un rôle clef.

Transport turbulent et fluctuations de concentration

Les interruptions du trafic aérien européen après l'éruption de l'Eyjafjallajökull en 2010 ont soulevé de nombreuses questions fondamentales sur la dispersion de particules dans l'atmosphère. Les séparations d'échelle importantes et la résolution limitée des modèles conduisent à utiliser une approximation ad-hoc des fluctuations turbulentes. Le transport est traité par une approche de type champ moyen où la concentration moyennée en espace et en temps est advectée par un vent moyen et diffuse sous les effets de la turbulence de l'air. De tels modèles donnent une bonne appréhension des effets à long terme et sont pertinents pour estimer, par exemple, l'impact sur la santé d'une exposition prolongée en aval d'une source de polluants. Toutefois, ces modèles ne permettent pas de prédire les fortes concentrations locales qui peuvent aussi conduire à des risques sanitaires qu'il est crucial de pouvoir prédire. Les échelles de temps et d'espace pertinentes sont alors bien plus petites que celles accessibles par les outils de modélisation. Le même type de question se pose lorsque l'on essaie d'évaluer les risques rencontrés par un avion. Il est fort probable que les dégâts occasionnés au moteur ou au fuselage se produisent lors de la traversée de nuages de cendres fortement concentrés qui ne sont pas décrits en termes de champ moyen.

Il est aujourd'hui important de joindre des efforts théoriques, numériques et expérimentaux pour améliorer la description, la compréhension et la modélisation des fluctuations de concentration de particules transportées par un écoulement atmosphérique turbulent. Je compte m'attaquer à cette question en adaptant les outils de la physique statistique de la turbulence à la description de ces événements intermittents, forts mais rares et qui peuvent jouer un rôle crucial sur l'ensemble de la statistique. De façon plus précise, je me consacrerai à l'étude de deux mécanismes généraux qui peuvent être identifiés comme étant les plus importantes sources de variabilité dans le champ de concentration d'une espèce transportée par un écoulement turbulent.

Comme nous l'avons vu dans le quatrième chapitre de ce mémoire, une première source de fluctuations est intrinsèquement liée à la nature même de l'écoulement porteur. Les ailes de la distribution de probabilité du champ de concentration d'un scalaire passif sont connues pour décroître bien moins rapidement que des gaussiennes. Cela peut s'interpréter en terme de piégeage des trajectoires dans les tourbillons turbulents de longue durée de vie. Je m'attacherai à déterminer la forme fonctionnelle de la loi de probabilité décrivant de tels événements. Je déterminerai en particulier si elle a un caractère universel ou si elle dépend des détails de l'écoulement (étirement moyen, anisotropie, inhomogénéités, présence de bords, etc).

Le second mécanisme de fluctuations vient du fait que la majeure partie de la matière particulaire suspendue dans l'atmosphère est constituée de particules de taille finie qui sont plus lourdes que l'air. Une première conséquence de leur poids est qu'elles sédimentent sous l'effet de la gravité. Nous comptons estimer la vitesse de ce processus dans les cas non-idéaux (lorsque par exemple les particules ne sont pas sphériques ou bien ont une taille finie), en prenant en compte les effets collectifs dus à la proximité d'autres particules elles-aussi en sédimentation. Une autre conséquence de leur masse est que de telles particules ont de l'inertie. Comme nous l'avons vu dans le premier chapitre, cela a pour conséquence leur éjection des structures tourbillonnaires de l'écoulement et favorise leur concentration dans les zones de fort étirement. De telles concentrations préférentielles augmentent la probabilité d'une grande fluctuation de densité dans la distribution de particules. Je m'attacherai notamment à quantifier de façon systématique les corrélations entre de telles concentrations et les structures turbulentes propres

aux écoulements géophysiques.

Cette partie de mon projet vise à répondre à la question de l'adéquation des modèles de dispersion atmosphérique utilisés par les organisations en charge de la surveillance de la qualité de l'air. L'absence de campagne de mesure suffisamment étendue, systématique et précise a d'une certaine façon ralenti la compréhension détaillée du transport de polluants ou de particules. Ceci a en conséquence freiné le développement de modèles à la fois efficaces et abordables. Je compte tenter de rattraper ce retard en identifiant les insuffisances des modèles de type « champ moyen » et en proposant des pistes alternatives pour la modélisation des fluctuations turbulentes. L'étude proposée fournira notamment de nouveaux outils pour décrire, comprendre et quantifier les mécanismes physiques responsables de grandes fluctuations qui ont un impact global sur la statistique.

Aussi, vu que la turbulence est omniprésente et généralement mal modélisée dans les processus atmosphériques, le travail envisagé conduira à des améliorations substantielles de fiabilité des outils de prédiction à grande échelle. C'est notamment le cas des modèles climatiques. L'incidence des particules en suspension dans l'atmosphère reste à ce jour mal comprise. Il est en effet souligné dans le 4ème rapport du GIEC que les aérosols font partie des sources majeures d'incertitudes dans la prédiction du climat. De telles particules peuvent avoir des effets directs ou indirects. D'une part, elles ont un effet refroidissant direct puisqu'elles réfléchissent une partie de la lumière du Soleil, réduisant ainsi les radiations atteignant la surface de la Terre. D'autre part, leur rôle de noyau de condensation dans les nuages a des effets indirects : une grande concentration de particules disperse la vapeur d'eau qui se condense sur un plus grand nombre de gouttelettes plus petites ; des conséquences immédiates sont une augmentation des propriétés réfléchissantes et de la durée de vie des nuages. Le travail proposé ouvrira une nouvelle voie pour s'attaquer à ce problème et améliorer la modélisation de l'impact climatique des aérosols.

Mécanismes de coalescence, d'accrétion et efficacités collisionnelles

Au croisement entre mes travaux sur les interactions entre particules inertielles et ceux sur les grosses particules en turbulence, je compte consacrer une partie de mon activité au problème de la détermination des efficacités collisionnelles et de coalescence entre particules. Pour commencer, j'ai décidé de me consacrer, en collaboration avec Holger Homann, aux effets sur la dynamique de particules lourdes ponctuelles induits par la présence d'une grosse particule sphérique. Ce cas correspond, d'une certaine manière, à l'étude des interactions entre particules dans l'asymptotique de tailles très différentes.

Deux applications concrètes motivent cette étude. La première concerne la formation des planètes dans un disque protoplanétaire pour lequel l'influence de la turbulence est importante et encore mal comprise. Une question clef est de comprendre si la turbulence du disque peut ou non engendrer une augmentation des taux d'accrétion de la poussière par un corps déjà gros. En d'autres termes, il s'agit d'identifier des mécanismes liés à des fluctuations turbulentes qui conduisent à un effet boule de neige où les corps les plus gros ont une vitesse de croissance d'autant plus rapide que leur taille augmente. Le même type de question se pose dans le processus de précipitation lorsqu'une grosse goutte de pluie tombe sous l'effet de la gravité et collisionne avec des gouttelettes bien plus petites transportées par l'écoulement turbulent de l'air dans le nuage. Pour le problème des gouttes de pluie, une autre question est de connaître l'efficacité de la déposition humide des polluants particuliers présents dans l'atmosphère. Ces différents phénomènes restent à ce jour mal compris et font l'objet de modélisations empiriques ad hoc en termes d'efficacité de collision.

Mon objectif vise à s'attaquer à ces problèmes en modélisant les petites particules (poussières, gouttelettes, ou aérosols) par des particules ponctuelles inertielles en prenant en compte la traînée visqueuse mesurée par le nombre de Stokes. Nous effectuons avec Holger Homann des simulations directes qui permettront de comprendre comment les taux de collisions entre ces particules et une particule de taille finie, elle-même en interaction avec un écoulement turbulent, varient en fonction de la taille des deux particules. Dans le cas de la pluie, le mouvement de la grosse particule est dominé par sa sédimentation gravitationnelle ce qui conduit à un glissement moyen par rapport au fluide. Dans le cas du disque protoplanétaire, la dynamique des gros corps est dominée par les lois de Kepler, ce qui résulte, là aussi, en une vitesse de glissement moyenne de la particule par rapport au gaz.

La Figure 4.31(a) illustre l'accrétion de petites particules dans le cas bidimensionnel. On voit là que l'écoulement autour du disque tend à écarter les lignes de courant, et du coup les petites particules. La fraction de celles-ci qui entre en collision avec la grosse particule est donc moindre que celle donnée par la section efficace de la grosse particule. Ceci permet de définir une efficacité collisionnelle E comme le rapport entre le nombre réel de collisions et celui prédit par des arguments géométriques. Aux pe-

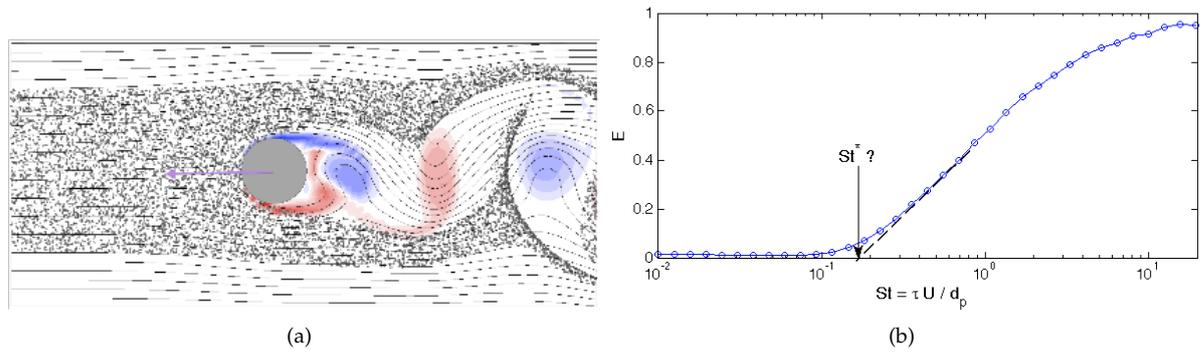


FIGURE 4.31 – (a) Instantané de la position de particules lourdes (points gris) du champ de vorticité (en bleu et rouge), et des lignes de courant (en noir) pour un écoulement bidimensionnel autour d'un disque développant une allée de Von Kármán. (b) Efficacité collisionnelle entre la sphère et les petites particules en fonction du nombre de Stokes de ces dernières.

tits nombres de Stokes, les particules sont quasiment des traceurs et ne rentrent donc pas en collision avec la grosse particule ; l'efficacité collisionnelle est proche de 0. Aux grands nombres de Stokes, les particules ont un temps de réponse très long et n'ont donc pas le temps de réagir aux perturbations de l'écoulement ; elles entrent donc quasiment toutes en collision et l'efficacité collisionnelle est proche de 1. Des comportements non-triviaux ont lieu entre ces deux extrêmes (voir par exemple la Figure 4.31(b) pour le cas bidimensionnel associé à l'allée de Von Kármán). Un problème que nous comptons aborder est celui de déterminer s'il existe ou non un nombre de Stokes critique en dessous duquel l'efficacité collisionnelle est strictement nulle. Aussi, comme on le voit sur la droite de la Figure 10, le sillage créé de forts gradients dans l'écoulement qui conduisent à la formation de « caustiques » dans la distribution des particules. Il s'agit là d'un mécanisme qui accélère très fortement les collisions entre petites particules. Un des objectifs sera de quantifier l'impact du mouvement des grosses particules sur ces collisions entre petites particules.

À plus long terme, et toujours en collaboration avec Holger Homann, je compte étudier les effets de forme sur la dynamique et l'accrétion de petites particules en nous concentrant d'abord sur le cas de grosses particules ellipsoïdales. Nous avons notamment l'intention de considérer des particules qui se déforment et grandissent au cours du temps afin de mieux comprendre les caractéristiques et le rôle des variations de forme apparaissant pendant le processus d'accrétion.

Finalement, pour aller au delà de l'asymptotique de petites particules interagissant avec une grosse, je compte m'intéresser au problème de l'efficacité collisionnelle entre particules de tailles comparables. Aussitôt que de telles particules de taille finie ne sont plus diluées et donc isolées, leurs interactions hydrodynamiques et leurs collisions modifient leur dynamique et leurs propriétés statistiques. En collaboration avec Holger Homann, nous comptons prendre en compte ces interactions en considérant des suspensions de plusieurs particules. Mettre de nombreuses particules dans le code de pseudo pénalisation ne pose pas de gros problèmes. La difficulté principale sera de traiter de façon efficace et physiquement réaliste les collisions solides.

Modélisation multi-physique des nuages chauds

Contexte

Les nuages sont à ce jour la plus grande source d'incertitude dans les modèles de prédiction du climat, comme cela est souligné dans le dernier rapport du GIEC. Du fait de leur influence considérable sur l'albedo et donc sur le budget radiatif de la Terre, les nuages maritimes bas (cumulus et stratocumulus) jouent un rôle crucial pour la fiabilité des pronostics climatiques. Ces nuages se forment au cours du refroidissement adiabatique d'une masse d'air chaud et humide. Pendant ce processus, la vapeur d'eau se condense sur de petits aérosols appelés noyaux de condensation. Ce mécanisme conduit à la formation de gouttelettes d'eau dont les tailles sont de l'ordre de quelques dizaines de μm . Pour précipiter, ces gouttelettes doivent atteindre des tailles supérieures au mm . Dans les nuages chauds, cette croissance a essentiellement lieu par coalescence. Les échelles de temps de formation de la pluie dépendent donc de façon cruciale de la largeur de la distribution de taille des gouttelettes et du taux auquel celles-ci collisionnent. L'influence de la turbulence sur ces processus est encore aujourd'hui très largement controversée. Ceci s'explique par l'absence de compréhension phénoménologique détaillée

d'un mécanisme clef : l'entraînement d'air sec à l'intérieur du nuage (voir Fig. 4.32(a)). Cet entraînement affecte la distribution de taille des gouttelettes qui, à son tour, contrôle l'épaisseur optique du nuage, ses propriétés de précipitation, et donc l'ensemble des aspects contribuant à son effet sur l'albedo. Une difficulté majeure pour quantifier l'impact de l'entraînement est la compétition entre deux effets : le mélange turbulent qui tend à répartir de façon uniforme l'eau à l'intérieur du nuage, et les fluctuations qui peuvent provoquer des croissances locales extrêmement rapides. La détermination de l'impact de la turbulence sur les processus microphysiques des nuages est une question clef pour l'amélioration des modèles utilisés en sciences de l'atmosphère, et notamment des paramétrisations pour les simulations à grande échelle (LES).

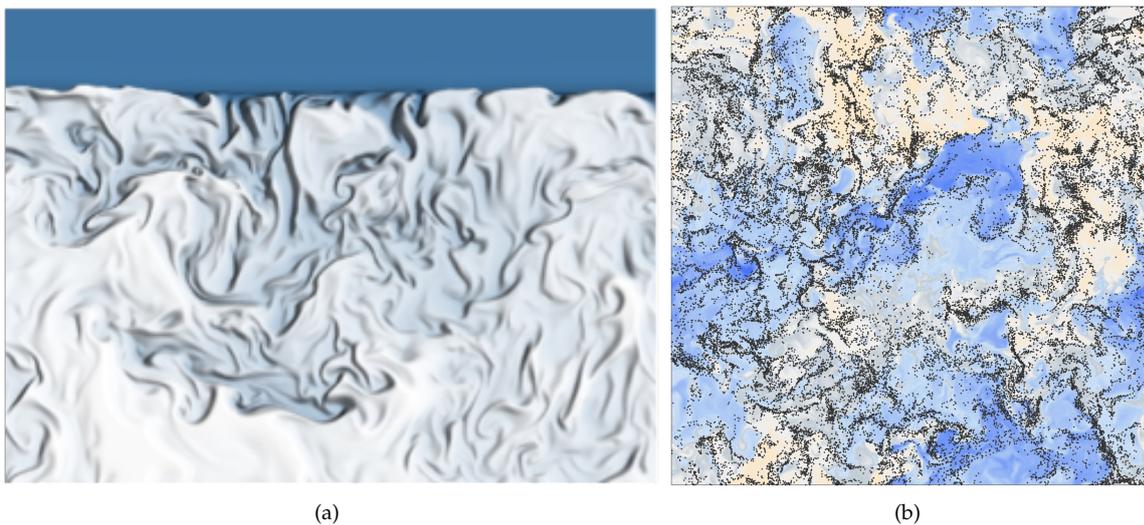


FIGURE 4.32 – (a) Coupe verticale d'une simulation numérique directe de la fraction haute d'un stratocumulus (d'après [Mel10]); l'air sec apparaît en bleu et l'air humide en blanc. (b) Coupe d'un champ de concentration (vapeur d'eau) transporté par un écoulement turbulent tridimensionnel; la concentration présente des fronts où elle varie de façon abrupte sur de toutes petites échelles; les gouttelettes, représentées par des points noirs, se concentrent à cause de leur inertie au voisinage de ces fronts.

Il est bien connu en turbulence fluide que les événements correspondant aux plus grandes amplitudes du gradient et de la vorticité de l'écoulement, ainsi que les fronts les plus violents apparaissant dans la distribution d'un scalaire passif, ont lieu à des échelles de l'ordre de l'échelle dissipative de Kolmogorov (de l'ordre du mm dans les nuages). Il s'agit exactement des échelles auxquelles la turbulence de l'air se couple avec le mouvement des gouttelettes. Mes travaux passé m'ont permis de mieux comprendre l'impact de la turbulence sur l'accélération, les propriétés de concentration et l'amplification des collisions entre de telles particules de taille finie. De surcroît, les écoulements turbulents amplifient l'intermittence des fluctuations observées dans un champ scalaire transporté. Les variations de la quantité de vapeur d'eau et de la température déterminent la supersaturation locale et donc le taux de croissance des gouttelettes par condensation. Elles peuvent donc contribuer à un élargissement du spectre de taille des gouttelettes, et ceci sur des échelles de temps bien plus courtes que celles obtenues par des arguments diffusifs. Ceci est confirmé par des travaux récents menés en collaboration avec G. Krstulovic et H. Homann. Nous avons montré que des particules inertielles lourdes transportées par un écoulement turbulent se concentrent dans les régions où le scalaire passif, comme par exemple la concentration de vapeur d'eau, subit de très fortes discontinuités (voir Fig. 4.32(b)). Ce nouvel effet est responsable de très forts niveaux de fluctuation pour le scalaire passif échantillonné le long des trajectoires de particules [BHK14].

La question de l'effet de la turbulence sur la formation et la vie des nuages implique de nombreux problèmes multi-physiques et multi-échelles qui peuvent aujourd'hui être abordés par le biais de simulations numériques directes utilisant les plus gros supercalculateurs actuellement accessibles. Il est en effet maintenant possible d'intégrer explicitement les interactions complexes entre l'air en mouvement, la vapeur d'eau transportée, les gouttelettes, les transferts thermiques et radiatifs sur une grande gamme d'échelles allant d'un volume significatif du nuage jusqu'à la plus petite taille des tourbillons turbulents, voire même aux échelles plus petites, et ceci avec une précision jusqu'à présent inégalée. Les précédentes démarches pour s'attaquer numériquement à ce problème se sont limitées à des fractions de nuage extrêmement petites (en dessous du mètre) ou bien ont adopté une approche approximative

qui ne considère pas explicitement la dynamique des particules d'eau. Développer les outils nécessaires au dépassement de cet état de l'art serait une occasion unique de créer, faire évoluer et étudier un nuage dans un tel laboratoire virtuel.

Objectifs

Je compte étudier les mécanismes complexes multi-physiques, multi-échelles, ayant lieu dans la fraction supérieure d'un stratocumulus (de taille au moins égale, au terme de notre projet, à 4 m x 4 m de base par 32 m de hauteur). Nous développerons pour cela les outils numériques qui permettront d'effectuer des simulations directes de l'écoulement turbulent multiphasique d'air et de vapeur d'eau, ce qui nécessitera d'intégrer la dynamique sur des centaines de milliard de points de grilles. Nous intégrerons en parallèle la condensation de la vapeur sur des particules discrètes et les différents transferts thermiques et radiatifs qui ont lieu dans cette partie du nuage. Cette étude numérique, qui utilisera les moyens de calculs les plus performants actuellement mis à la disposition de la communauté scientifique, sera appuyée par une analyse statistique des différentes observables pertinentes et conduira au développement de nouveaux modèles pour la dynamique et la microphysique des nuages. Mon objectif est d'apporter une réponse aux questions suivantes :

- (i) Comment la myriade de mécanismes qui amplifient la turbulence de la couche nuageuse (cisaillement, renversements, refroidissement radiatif) contribue-t-elle à l'entraînement d'air sec et à l'établissement de la structure de la bordure du nuage ?
- (ii) Quel est l'effet de l'entraînement d'air sec à l'intérieur du nuage sur la distribution de taille des gouttelettes d'eau et donc sur l'épaisseur optique des stratocumulus et sur les échelles de temps de formation de la pluie ?
- (iii) Quels sont les outils algorithmiques les plus performants pour traiter les interactions complexes fluide/particules/photons en descendant jusqu'aux échelles les plus petites d'un nuage turbulent ?
- (iv) Comment utiliser ces progrès dans la compréhension microphysique des nuages pour améliorer les paramétrisations utilisées aux plus grandes échelles, comme par exemple dans les modèles climatiques ?

L'étude que je propose éclaircira les mécanismes locaux de mélange d'air sec et nuageux, ainsi que leurs relations avec les fluctuations turbulentes à petite échelle et les différentes formes de forçage. J'étudierai aussi l'impact de l'entraînement sur l'élargissement initial de la distribution de taille des gouttelettes, qui, elle-même, détermine les propriétés optiques du nuage et sa disposition à entrer en précipitation. Tous ces processus sont implémentés dans les modèles récents de type simulations aux grandes échelles (LES) mais se doivent d'être paramétrés de façon adéquate. Mon approche numérique consistera à développer une méthode hybride qui combine les descriptions eulériennes et lagrangiennes des différents champs présents dans un nuage turbulent, à savoir :

- (a) la vitesse turbulente, la température et la quantité de vapeur d'eau, dont les équations d'évolution seront intégrées dans le repère eulérien ;
- (b) la teneur en eau liquide, dont la description se fera par un ensemble de gouttelettes lagrangiennes qui pourront grossir ou rétrécir par condensation ou évaporation et qui seront émettrices de chaleur latente ou de refroidissement évaporatif ; aussi, les gouttelettes d'eau interagiront entre elles par collision et coalescence.
- (c) les propriétés de transfert radiatif, qui sont directement couplées à la distribution de taille des gouttelettes, et seront traitées par une méthode de Monte-Carlo tridimensionnelle.

Ces simulations nécessiteront d'atteindre de nouveaux niveaux de calcul haute performance puisque je vise, au terme de ce projet, une résolution maximale de $4096 \times 4096 \times 32768 \approx 5.5 \cdot 10^{11}$ points de grille eulériens et plusieurs milliards de particules lagrangiennes. Cet objectif permettra de mettre à l'épreuve le savoir-faire de l'équipe dans les calculs massivement parallèles utilisant simultanément plus d'une centaine de milliers de cœurs. Cette étude numérique sera complétée par des travaux analytiques qui porteront sur l'élaboration de nouveaux modèles pour la microphysique des nuages. Par exemple, des comparaisons systématiques seront effectuées entre les résultats des simulations directes et les prédictions obtenues à partir des modèles cinétiques de type champs moyens qui négligent les fluctuations turbulentes. Je regarderai en particulier quelles sont les améliorations de ces derniers qui sont nécessaires pour reproduire de façon adéquate l'élargissement de la distribution de taille des gouttelettes. Il est fort probable que certains événements de faible probabilité affectent l'ensemble de la statistique à travers une sorte d'effet « boule de neige » où quelques particules plus grosses que la moyenne se décroissent soudainement de l'écoulement, échantillonnent des régions fortement humides du nuage, entrent en collision avec un grand nombre de particules plus petites, et croissent d'une façon anormalement rapide. Une partie de mon objectif consistera à identifier, décrire et modéliser de tels événements extrêmes.

Bibliographie

- [ABB⁺08] A. Arnéodo, R. Benzi, J. Berg, L. Biferale, E. Bodenschatz, A. Busse, E. Calzavarini, B. Castaing, M. Cencini, L. Chevillard, et al., *Universal intermittent properties of particle trajectories in highly turbulent flows*, Phys. Rev. Lett. 100 (2008), no. 25, 254504.
- [Abr75] J. Abrahamson, *Collision rates of small particles in a vigorously turbulent fluid*, Chem. Eng. Sci. 30 (1975), no. 11, 1371–1379.
- [AGC⁺06] S. Ayyalasomayajula, A. Gylfason, L. R. Collins, E. Bodenschatz, and Z Warhaft, *Lagrangian measurements of inertial particle accelerations in grid generated wind tunnel turbulence*, Phys. Rev. Lett. 97 (2006), 144507.
- [AHP88] T. Auton, J. Hunt, and M. Prud'homme, *The force exerted on a body in inviscid unsteady non-uniform rotational flow*, J. Fluid Mech. 197 (1988), 241–257.
- [ARWG08] O. Ayala, B. Rosa, L.-P. Wang, and W. Grabowski, *Effects of turbulence on the geometric collision rate of sedimenting droplets. Part 1. Results from direct numerical simulation*, New J. Phys. 10 (2008), 075015.
- [ASZ82] V. I. Arnold, S. F. Shandarin, and Ya. B. Zeldovich, *The large scale structure of the universe I. General properties. One- and two-dimensional models*, Geophys. Astrophys. Fluid Dyn. 20 (1982), no. 1-2, 111–130.
- [Bal09] S. Balachandar, *A scaling analysis for point-particle approaches to turbulent multiphase flows*, Int. J. Multiphase Flow 35 (2009), 801 – 810.
- [Bat50] G. K. Batchelor, *The application of the similarity theory of turbulence to atmospheric diffusion*, Quart. J. R. Meteorol. Soc. 76 (1950), 133–146.
- [Bat52] ———, *Diffusion in a field of homogeneous turbulence. II The relative motion of particles*, Proc. Camb. Phil. Soc. 48 (1952), 345–363.
- [BB02] P. Bagchi and S. Balachandar, *Effect of free rotation on the motion of a solid sphere in linear shear flow at moderate Re*, Phys. Fluids 14 (2002), 2719–2737.
- [BB03] P. Bagchi and S. Balachandar, *Effect of turbulence on the drag and lift of a particle*, Phys. Fluids 15 (2003), no. 11, 3496.
- [BB04] ———, *Response of the wake of an isolated particle to an isotropic turbulent flow*, J. Fluid Mech. 518 (2004), 95–123.
- [BBB⁺06a] J. Bec, L. Biferale, G. Boffetta, A. Celani, M. Cencini, A. S. Lanotte, S. Musacchio, and F. Toschi, *Acceleration statistics of heavy particles in turbulence*, J. Fluid Mech. 550 (2006), 349–358.
- [BBB⁺06b] J. Bec, L. Biferale, G. Boffetta, M. Cencini, S. Musacchio, and F. Toschi, *Lyapunov exponents of heavy particles in turbulence*, Phys. Fluids 18 (2006), 091702.
- [BBC⁺04] L. Biferale, G. Boffetta, A. Celani, B.J. Devenish, A. Lanotte, and F. Toschi, *Multifractal statistics of Lagrangian velocity and acceleration in turbulence*, Phys. Rev. Lett. 93 (2004), no. 6, 64502.
- [BBC⁺05a] L. Biferale, G. Boffetta, A. Celani, B.J. Devenish, A. Lanotte, and F. Toschi, *Lagrangian statistics of particle pairs in homogeneous isotropic turbulence*, Phys. Fluids 17 (2005), 115101.
- [BBC⁺05b] L. Biferale, G. Boffetta, A. Celani, A. Lanotte, and F. Toschi, *Particle trapping in three-dimensional fully developed turbulence*, Phys. Fluids 17 (2005), 021701.
- [BBC⁺06] J. Bec, L. Biferale, M. Cencini, A. S. Lanotte, and F. Toschi, *Effects of vortex filaments on the velocity of tracers and heavy particles in turbulence*, Phys. Fluids 18 (2006), 081702.
- [BBC⁺07] J. Bec, L. Biferale, M. Cencini, A. S. Lanotte, S. Musacchio, and F. Toschi, *Heavy particle concentration in turbulence at dissipative and inertial scales*, Phys. Rev. Lett. 98 (2007), 084502.

- [BBC⁺10] J. Bec, L. Biferale, M. Cencini, A. S. Lanotte, and F. Toschi, *Intermittency in the velocity distribution of heavy particles in turbulence*, J. Fluid Mech. 646 (2010), 527–536.
- [BBL⁺10] J. Bec, L. Biferale, A. S. Lanotte, A. Scagliarini, and F. Toschi, *Turbulent pair dispersion of inertial particles*, J. Fluid Mech. 645 (2010), 497–528.
- [BC07] J. Bec and R. Ch  trite, *Toward a phenomenological approach to the clustering of heavy particles in turbulent flows*, New J. Phys. 9 (2007), 77.
- [BCCM05] J. Bec, A. Celani, M. Cencini, and S. Musacchio, *Clustering and collisions of heavy particles in random smooth flows*, Phys. Fluids 17 (2005), 073301.
- [BCH07a] J. Bec, M. Cencini, and R. Hillerbrand, *Clustering of heavy particles in random self-similar flow*, Phys. Rev. E 75 (2007), 025301.
- [BCH07b] ———, *Heavy particles in incompressible flows : the large Stokes number asymptotics*, Physica D 226 (2007), 11–22.
- [BCHT08] J. Bec, M. Cencini, R. Hillerbrand, and K. Turitsyn, *Stochastic suspensions of heavy particles*, Physica D 237 (2008), 2037–2050.
- [BCPP00] A. Babiano, J. H. E. Cartwright, O. Piro, and A. Provenzale, *Dynamics of a small neutrally buoyant sphere in a fluid and targeting in Hamiltonian systems*, Phys. Rev. Lett 84 (2000), 5764–5768.
- [BCT⁺93] R Benzi, S Ciliberto, R Tripiccion, C Baudet, F Massaioli, and S Succi, *Extended self-similarity in turbulent flows*, Phys. Rev. A 48 (1993), no. 1, R29–R32.
- [BDLG04] G. Boffetta, F. De Lillo, and A. Gamba, *Large scale inhomogeneity of inertial particles in turbulent flows*, Phys. Fluids 16 (2004), L20.
- [BDLM02] G. Boffetta, F. De Lillo, and S. Musacchio, *Lagrangian statistics and temporal intermittency in a shell model of turbulence*, Phys. Rev. E 66 (2002), 066307.
- [Bec03] J. Bec, *Fractal clustering of inertial particles in random flows*, Phys. Fluids 15 (2003), L81–L84.
- [Bec05] ———, *Multifractal concentrations of inertial particles in smooth random flows*, J. Fluid Mech. 528 (2005), 255–277.
- [BF99] E. Balkovsky and A. Fouxon, *Universal long-time properties of Lagrangian statistics in the Batchelor regime and their application to the passive scalar problem*, Phys. Rev. E 60 (1999), 4164.
- [BFF01] E. Balkovsky, G. Falkovich, and A. Fouxon, *Intermittent distribution of inertial particles in turbulent flows*, Phys. Rev. Lett. 86 (2001), 2790–2793.
- [BGH04] J. Bec, K. Gaw  dzki, and P. Horvai, *Multifractal clustering in compressible flows*, Phys. Rev. Lett. 92 (2004), 224501.
- [BHB12] R. Bitane, H. Homann, and J. Bec, *Time scales of turbulent relative dispersion*, Physical Review E 86 (2012), no. 4, 045302.
- [BHB13] ———, *Geometry and violent events in turbulent pair dispersion*, Journal of Turbulence 14 (2013), 23–45.
- [BHK14] J. Bec, H. Homann, and G. Krstulovic, *Clustering, fronts, and heat transfer in turbulent suspensions of heavy particles*, arXiv : 1401.2080, 2014.
- [BHR14] J  r  mie Bec, Holger Homann, and Samriddhi Sankar Ray, *Gravity-driven enhancement of heavy particle clustering in turbulent flow*, Phys. Rev. Lett. 112 (2014), 184501.
- [Bis03] D. Biskamp, *Magnetohydrodynamic turbulence*, Cambridge University Press, Cambridge, 2003.
- [BK07] J  r  mie Bec and Konstantin Khanin, *Burgers turbulence*, Phys. Rep. 447 (2007), no. 1, 1–66.
- [Bor93] M. S. Borgas, *The multifractal Lagrangian nature of turbulence*, Phil. Trans. R. Soc. Lond. A 342 (1993), no. 1665, 379–411.
- [BS02] G. Boffetta and I.M. Sokolov, *Relative dispersion in fully developed turbulence : The Richardson’s law and intermittency corrections*, Physics Review Letters 88 (2002), 094501.
- [BV12] G Bellani and E A Variano, *Slip velocity of large neutrally buoyant particles in turbulent flows*, New J. Phys. 14 (2012), no. 12, 125009.
- [BY04] M. S. Borgas and P.-K. Yeung, *Relative dispersion in isotropic turbulence. Part 2. A new stochastic model with Reynolds-number dependence*, J. Fluid Mech. 503 (2004), 125–160.

- [CBB⁺06] M. Cencini, J. Bec, L. Biferale, G. Boffetta, A. Celani, A. S. Lanotte, S. Musacchio, and F. Toschi, *Dynamics and statistics of heavy particles in turbulent flows*, J. of Turbulence 7 (2006), 1–16.
- [CDKS93] S. Chen, G. D. Doolen, R. H. Kraichnan, and Z.-S. She, *On statistical correlations between velocity increments and locally averaged dissipation in homogeneous turbulence*, Phys. Fluids A 5 (1993), 458–463.
- [CFR10] S. Chakraborty, U. Frisch, and S. S. Ray, *Extended self-similarity works for the Burgers equation and why*, J. Fluid Mech. 649 (2010), 275–285.
- [CGV06] L. Chen, S. Goto, and J.-C. Vassilicos, *Turbulent clustering of stagnation points and inertial particles*, J. Fluid Mech. 553 (2006), 143–154.
- [CGW78] R. Clift, J. R. Grace, and M. E. Weber, *Bubbles, drops and particles*, Academic Press, London, 1978.
- [CHB13] M. Cisse, H. Homann, and J. Bec, *Slipping motion of large neutrally buoyant particles in turbulence*, J. Fluid Mech. 735 (2013), R1.
- [CHT03] R. Crutcher, C. Heiles, and T. Troland, *Observations of Interstellar Magnetic Fields*, Turbulence and Magnetic Fields in Astrophysics (E. Falgarone and T. Passot, eds.), Lecture Notes in Physics, Berlin Springer Verlag, vol. 614, 2003, pp. 155–181.
- [CJVP93] A. Crisanti, M. H. Jensen, A. Vulpiani, and G. Paladin, *Intermittency and predictability in turbulence*, Phys. Rev. Lett. 70 (1993), no. 2, 166–169.
- [CK04] L. R. Collins and A. Keswani, *Reynolds number scaling of particle clustering in turbulent aerosols*, New J. Phys. 6 (2004), 119.
- [CKLT08] E. Calzavarini, M. Kerscher, D. Lohse, and F. Toschi, *Dimensionality and morphology of particle and bubble clusters in turbulent flow*, J. Fluid Mech. 607 (2008), 13–24.
- [CKR⁺05] J. Chun, D. L. Koch, S. L. Rani, A. Ahluwalia, and L. R. Collins, *Clustering of aerosol particles in isotropic turbulence*, J. Fluid Mech. 536 (2005), 219–251.
- [CLMV00] A. Celani, A. Lanotte, A. Mazzino, and M. Vergassola, *Universality and saturation of intermittency in passive scalar turbulence*, Phys. Rev. Lett. 84 (2000), no. 11, 2385.
- [CLMV01] A. Celani, A. Lanotte, A. Mazzino, and M. Vergassola, *Fronts in passive scalar turbulence*, Phys. Fluids 13 (2001), 1768–1783.
- [CMB05] A. M. Crawford, N. Mordant, and E. Bodenschatz, *Joint statistics of the Lagrangian acceleration and velocity in fully developed turbulence*, Phys. Rev. Lett. 94 (2005), no. 2, 024501.
- [CPV93] A. Crisanti, G. Paladin, and A. Vulpiani, *Products of random matrices*, Springer, 1993.
- [CVB⁺09] E. Calzavarini, R. Volk, M. Bourgoïn, E. Lévêque, J.-F. Pinton, and F. Toschi, *Acceleration statistics of finite-sized particles in turbulent flow : The role of Fax  n forces*, J. Fluid. Mech. 630 (2009), 179–189.
- [DCB91] S. Douady, Y. Couder, and M.-E. Brachet, *Direct observation of the intermittency of intense vorticity filaments in turbulence*, Phys. Rev. Lett. 67 (1991), 983–986.
- [DD90] D. S. Dandy and H. A. Dwyer, *A sphere in shear flow at finite Reynolds number : effect of shear on particle lift, drag, and heat transfer*, J. Fluid Mech. 216 (1990), 381–410.
- [deA06] U. deAngelis, *Dusty plasmas in fusion devices*, Phys. Plasmas 13 (2006), 012514.
- [Deu85] J. M. Deutsch, *Aggregation-disorder transition induced by fluctuating random forces*, J. Phys. A 18 (1985), 1449–1456.
- [DFT08] S. Derevyanko, G. Falkovich, and S. Turitsyn, *Evolution of non-uniformly seeded warm clouds in idealized turbulent conditions*, New J. Phys. 10 (2008), 075019.
- [DH01] J. Davila and J. C. R. Hunt, *Settling of small particles near vortices and in turbulence*, J. Fluid Mech. 440 (2001), 117–145.
- [dL01] I. dePater and J. Lissauer, *Planetary sciences*, Cambridge University Press, Cambridge, 2001.
- [DM  W05] K. Duncan, B. Mehlig, S.   stlund, and M. Wilkinson, *Clustering by mixing flows*, Phys. Rev. Lett. 95 (2005), no. 24, 240602.
- [dSZG07] M. C. deJuli, R. S. Schneider, L. F. Ziebell, and R. Gaelzer, *Effect of charged dust particles on the ion cyclotron and firehose instabilities*, J. Geophys. Res. 112 (2007), 10105.
- [EF94] J. K. Eaton and J. R. Fessler, *Preferential concentration of particles by turbulence*, International Journal of Multiphase Flow 20 (1994), 169–209.

- [Eyi11] G. L. Eyink, *Stochastic flux freezing and magnetic dynamo*, Phys. Rev. E 83 (2011), 056405.
- [FdJ03] D. Falceta-Gonçalves, M. C. de Juli, and V. Jatenco-Pereira, *Dusty Molecular Cloud Collapse in the Presence of Alfvén Waves*, Astrophys. J. 597 (2003), 970–974.
- [FFS02] G. Falkovich, A. Fouxon, and M. G. Stepanov, *Acceleration of rain initiation by cloud turbulence*, Nature 419 (2002), 151–154.
- [FFS03] G. Falkovich, A. Fouxon, and M. Stepanov, *Statistics of turbulence-induced fluctuations of particles concentration*, Sedimentation and Sediment Transport, edited by A. Gyr and W. Kinzelbach (Kluwer Academic, Dordrecht, 2003) (2003), 155–158.
- [FGV01] G. Falkovich, K. Gawędzki, and M. Vergassola, *Particles and fields in fluid turbulence*, Rev. Mod. Phys. 73 (2001), 913–974.
- [FH08] I. Fouxon and P. Horvai, *Separation of heavy particles in turbulence*, Phys. Rev. Lett. 100 (2008), 040601.
- [Fou12] I. Fouxon, *Distribution of particles and bubbles in turbulence at a small Stokes number*, Phys. Rev. Lett. 108 (2012), 134502.
- [FP04] G. Falkovich and A. Pumir, *Intermittent distribution of heavy particles in a turbulent flow*, Phys. Fluids 16 (2004), L47–L50.
- [FP06] S. Fromang and J. Papaloizou, *Dust settling in local simulations of turbulent protoplanetary disks*, Astron. Astrophys. 452 (2006), 751–762.
- [FP07] G. Falkovich and A. Pumir, *Sling effect in collisions of water droplets in turbulent clouds*, J. Atmos. Sci. 64 (2007), no. 12, 4497–4505.
- [Fri95] U. Frisch, *Turbulence*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [Gat83] R. Gatignol, *The Faxén formulae for a rigid sphere in an unsteady non-uniform Stokes flow*, J. Méc. Théor. Appl. 1 (1983), 143–160.
- [GF01] T. Gotoh and D. Fukayama, *Pressure spectrum in homogeneous turbulence*, Phys. Rev. Lett. 86 (2001), no. 17, 3775–3779.
- [GHP12] R. Grauer, H. Homann, and J.-F. Pinton, *Longitudinal and transverse structure functions in high Reynolds-number turbulence*, New J. of Phys. 14 (2012), 063016.
- [GHW11] K. Gawędzki, D. P. Herzog, and J. Wehr, *Ergodic properties of a model for turbulent dispersion of inertial particles*, Comm. Math. Phys. 308 (2011), no. 1, 49–80.
- [GM13] K. Gustavsson and B. Mehlig, *Distribution of velocity gradients and rate of caustic formation in turbulent aerosols at finite Kubo numbers*, Phys. Rev. E 87 (2013), no. 2, 023016.
- [GP90] S. S. Girimaji and S. B. Pope, *Material-element deformation in isotropic turbulence*, J. Fluid Mech. 220 (1990), 427–458.
- [Gra83] P. Grassberger, *Generalized dimensions of strange attractors*, Phys. Lett. A 97 (1983), 227–230.
- [HB10] H. Homann and J. Bec, *Finite-size effects in the dynamics of neutrally buoyant particles in turbulent flow*, J. Fluid Mech. 651 (2010), 81–91.
- [HBFG09] H. Homann, J. Bec, H. Fichtner, and R. Grauer, *Clustering of passive impurities in magnetohydrodynamic turbulence*, Phys. Plasmas 16 (2009), no. 8, 082308.
- [HBG13] H. Homann, J. Bec, and R. Grauer, *Effect of turbulent fluctuations on the drag and lift forces on a towed sphere and its boundary layer*, J. Fluid Mech. 721 (2013), 155–179.
- [HGOB08] M. Heyer, H. Gong, E. Ostriker, and C. Brunt, *Magnetically Aligned Velocity Anisotropy in the Taurus Molecular Cloud*, Astrophys. J. 680 (2008), 420–427.
- [Hil02] R. J. Hill, *Scaling of acceleration in locally isotropic turbulence*, J. Fluid Mech. 452 (2002), 361–370.
- [Hor05] P. Horvai, *Lyapunov exponent for inertial particles in the 2d kraichnan model as a problem of anderson localization with complex valued potential*, arXiv : nlin/0511023, 2005.
- [HP83] H. G. E. Hentschel and I. Procaccia, *The infinite number of generalized dimensions of fractals and strange attractors*, Physica D 8 (1983), 435–444.
- [KB12] J. Kim and S. Balachandar, *Mean and fluctuating components of drag and lift forces on an isolated finite-sized particle in turbulence*, Theoretical and Computational Fluid Dynamics 26 (2012), no. 1, 185–204.

- [KBB12] G. Krstulovic, R. Bitane, and J. Bec, *Diffusion in time-dependent random environments : mass fluctuations and scaling properties*, New J. Phys. 14 (2012), 073053.
- [KK97] F. E. Kruis and K. A. Kusters, *The collision rate of particles in turbulent flow*, Chem. Eng. Comm. 158 (1997), no. 1, 201–230.
- [KK99] R. Kurose and S. Komori, *Drag and lift forces on a rotating sphere in a linear shear flow*, J. Fluid Mech. 384 (1999), 183–206.
- [Kol41] A. N. Kolmogorov, *Energy dissipation in locally isotropic turbulence*, Dokl. Akad. Nauk SSSR 32 (1941), 19–21.
- [Kra66] R. H. Kraichnan, *Dispersion of particle pairs in homogeneous turbulence*, Phys. Fluids 9 (1966), 1937.
- [Kra68] R. H. Kraichnan, *Small-scale structure of a scalar field convected by turbulence*, Phys. Fluids 11 (1968), 945.
- [KS01] A. B. Kostinski and R. A. Shaw, *Scale-dependent droplet clustering in turbulent clouds*, J. Fluid Mech. 434 (2001), 389–398.
- [Kur97] O. Kurbanmuradov, *Stochastic Lagrangian models for two-particle relative turbulent dispersion in high-Reynolds number turbulence*, Monte Carlo Methods and Appl. 3 (1997), 37–52.
- [KY79] J. L. Kaplan and J. A. Yorke, *Chaotic behavior of multidimensional difference equations*, Proceedings on Functional Differential Equations and Approximation of Fixed Points (Bonn, 1978) (Berlin), Lecture Notes in Mathematics, vol. 730, Springer, 1979, pp. 204–227.
- [LD02] Y. Liu and P. H. Daum, *Anthropogenic aerosols : Indirect warming effect from dispersion forcing*, Nature 419 (2002), 580–581.
- [LHP70] B. P. Le Clair, A. E. Hamielec, and H. R. Pruppacher, *A Numerical Study of the Drag on a Sphere at Low and Intermediate Reynolds Numbers.*, Journal of Atmospheric 27 (1970), 308–315.
- [LPS70] C. J. Lin, J. H. Peery, and W. R. Showalter, *Simple shear flow round inertial effects and suspension rheology*, J. Fluid Mech. 44 (1970), 1–17.
- [LPVC⁺01] A. La Porta, G. A. Voth, A. M. Crawford, J. Alexander, and E. Bodenschatz, *Fluid particle accelerations in fully developed turbulence*, Nature 409 (2001), no. 6823, 1017–1019.
- [LY88] F. Ledrappier and L.-S. Young, *Dimension formula for random transformations*, Commun. Math. Phys. 117 (1988), 529–548.
- [Max87] M. R. Maxey, *The gravitational settling of aerosol particles in homogeneous turbulence and random flow fields*, J. Fluid Mech. 174 (1987), 441–465.
- [MBPF05] D. Mitra, J. Bec, R. Pandit, and U. Frisch, *Is multiscaling an artifact in the stochastically forced Burgers equation ?*, Phys. Rev. Lett. 94 (2005), no. 19, 194501.
- [MCB04] N. Mordant, A. M. Crawford, and E. Bodenschatz, *Three-dimensional structure of the Lagrangian acceleration in turbulent flows*, Phys. Rev. Lett. 93 (2004), 214501.
- [Mel10] J. P. Mellado, *The evaporatively driven cloud-top mixing layer*, J. Fluid Mech. 660 (2010), 5–36.
- [Men96] C. Meneveau, *Transition between viscous and inertial-range scaling of turbulence structure functions*, Phys. Rev. E 54 (1996), no. 4, 3657–3663.
- [MG04] L. A. Montier and M. Giard, *The importance of dust in cooling and heating the InterGalactic Medium*, Astron. Astrophys. 417 (2004), 401–409.
- [MLM05] A. Merle, D. Legendre, and J. Magnaudet, *Forces on a high-Reynolds-number spherical bubble in a turbulent flow*, J. Fluid Mech. 532 (2005), 53–62.
- [MMMP01] N. Mordant, P. Metz, O. Michel, and J.-F. Pinton, *Measurement of Lagrangian velocity in fully developed turbulence*, Phys. Rev. Lett. 87 (2001), no. 21, 214501.
- [MR83] M. R. Maxey and J. J. Riley, *Equation of motion for a small rigid sphere in a nonuniform flow*, Phys. Fluids 26 (1983), 883–889.
- [MTVE01] A. Majda, I. Timofeyev, and E. Vanden Eijnden, *A mathematical framework for stochastic climate models*, Comm. Pure Appl. Math. 54 (2001), 891–974.
- [MUW07] B. Mehlig, V. Uski, and M. Wilkinson, *Colliding particles in highly turbulent flows*, Phys. Fluids 19 (2007), no. 9, 098107.
- [MW04] B. Mehlig and M. Wilkinson, *Coagulation by random velocity fields as a Kramers problem*, Phys. Rev. Lett. 92 (2004), 250602.

- [MWD⁺05] B. Mehlig, M. Wilkinson, K. Duncan, T. Weber, and M. Ljunggren, *Aggregation of inertial particles in random flows*, Phys. Rev. E 72 (2005), 051104.
- [MY71] A. S. Monin and A. M. Yaglom, *Statistical fluid mechanics : Mechanics of turbulence*, vol. 1, MIT press, Cambridge, USA, 1971.
- [NP10] A. Naso and A. Prosperetti, *The interaction between a solid particle and a turbulent flow*, New J. Phys. 12 (2010), 033040.
- [Obu41] A .M. Obukhov, *On the distribution of energy in the spectrum of turbulent flow*, Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Geogr. Geofiz. 5 (1941), 453–466.
- [Oll08] P. Olla, *Clustering and collision of inertial particles in random velocity fields*, Phys. Rev. E 77 (2008), no. 6, 065301.
- [OM00] S. Ott and J. Mann, *An experimental investigation of the relative diffusion of particle pairs in three-dimensional turbulent flow*, J. Fluid Mech. 422 (2000), 207–223.
- [OPS⁺03] O. G. Onishchenko, O. A. Pokhotelov, R. Z. Sagdeev, L. Stenflo, V. P. Pavlenko, P. K. Shukla, and V. V. Zolotukhin, *Modification of Kolmogorov spectra of weakly turbulent shear Alfvén waves by dust grains*, Phys. Plasmas 10 (2003), 69–74.
- [OXBB06] N. T. Ouellette, H. Xu, M. Bourgoïn, and E. Bodenschatz, *An experimental study of turbulent relative dispersion models*, New J. Phys. 8 (2006), 109.
- [Pit01] L. Piterbarg, *The top lyapunov exponent for a stochastic flow modeling the upper ocean turbulence*, SIAM J. Appl. Math. 62 (2001), 777–800.
- [PKSR05] A. Y. Pigarov, S. I. Krasheninnikov, T. K. Soboleva, and T. D. Rognlien, *Dust-particle transport in tokamak edge plasmas*, Phys. Plasmas 12 (2005), 122508.
- [Pop00] S. B. Pope, *Turbulent flows*, first ed., Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
- [PV87] G. Paladin and A. Vulpiani, *Anomalous scaling laws in multifractal objects*, Phys. Rep. 156 (1987), 147–225.
- [QBB⁺07] N. N. Qureshi, M. Bourgoïn, C. Baudet, A. Cartellier, and Y. Gagne, *Turbulent transport of material particles : an experimental study of finite size effects*, Phys. Rev. Lett. 99 (2007), 184502.
- [RC00] W. C. Reade and L. R. Collins, *Effect of preferential concentration on turbulent collision rates*, Phys. Fluids 12 (2000), 2530–2540.
- [Ric26] L. F. Richardson, *Atmospheric diffusion shown on a distance-neighbour graph*, Proc. R. Soc. Lond. Ser. A 110 (1926), 709—737.
- [RKM⁺08] D. W. I. Rouson, S. C. Kassinos, I. Moulitsas, I. E. Sarris, and X. Xu, *Dispersed-phase structural anisotropy in homogeneous magnetohydrodynamic turbulence at low magnetic Reynolds number*, Phys. Fluids 20 (2008), 025101.
- [Rog05] T. D. Rognlien, *Understanding of edge plasmas in magnetic fusion energy devices*, Pl. Phys. Contr. Fus. 47 (2005), A260000–A295.
- [RPGW13] B. Rosa, O. Parishani, H. and Ayala, W. W. Grabowski, and L.-P. Wang, *Kinematic and dynamic collision statistics of cloud droplets from high-resolution simulations*, New J. Phys. 15 (2013), no. 4, 045032.
- [RSP08] M. Rosenberg, R. D. Smirnov, and A. Y. Pigarov, *On thermal radiation from heated metallic dust grains*, J. Phys. D : Appl. Phys. 41 (2008), 015202.
- [Saw01] B. L. Sawford, *Turbulent relative dispersion*, Annu. Rev. Fluid Mech. 33 (2001), 289—317.
- [SBT12] R. Scatamacchia, L. Biferale, and F. Toschi, *Extreme events in the dispersions of two neighboring particles under the influence of fluid turbulence*, Phys. Rev. Lett. 109 (2012), 144501.
- [SC97] S. Sundaram and L. R. Collins, *Collision statistics in an isotropic particle-laden turbulent suspension. Part 1. Direct numerical simulations*, J. Fluid Mech. 335 (1997), 75–109.
- [SC09] J. P. L. C. Salazar and L. R. Collins, *Two-particle dispersion in isotropic turbulent flows*, Annu. Rev. Fluid Mech. 41 (2009), 405–432.
- [SC12] J. P. L. C. Salazar and L. R. Collins, *Inertial particle relative velocity statistics in homogeneous isotropic turbulence*, J. Fluid Mech. 696 (2012), 45–66.
- [Sch79] H. Schlichting, *Boundary-layer theory*, McGraw-Hill, New York, United States, 1979.
- [SE91] K. D. Squires and J. K. Eaton, *Preferential concentration of particles by turbulence*, Phys. Fluids A 3 (1991), 1169–1178.

- [SG91] B. L. Sawford and F. M. Guest, *Lagrangian statistical simulation of the turbulent motion of heavy particles*, *Boundary-Layer Meteorology* 54 (1991), 147–166.
- [SL94] Z.-S. She and E. L ev eque, *Universal scaling laws in fully developed turbulence*, *Phys. Rev. Lett.* 72 (1994), no. 3, 336–339.
- [SN33] L. Schiller and A. Naumann, * uber die grundlegenden berechnungen bei der schwerkraftaufbereitung*, *Verein Deutscher Ingenieure* 77 (1933), 318.
- [ST56] P. G. Saffman and J. S. Turner, *On the collision of drops in turbulent clouds*, *J. Fluid Mech.* 1 (1956), no. 01, 16–30.
- [SYB+03] B. L. Sawford, P. K. Yeung, M. S. Borgas, P. Vedula, A. La Porta, A. M. Crawford, and E. Bodenschatz, *Conditional and unconditional acceleration statistics in turbulence*, *Phys. Fluids* 15 (2003), 3478.
- [Tay21] G. I. Taylor, *Diffusion by continuous movements*, *Proc. London Math. Soc.* 20 (1921), 196–212.
- [Ten75] H. Tennekes, *Eulerian and Lagrangian time microscales in isotropic turbulence*, *J. Fluid Mech.* 67 (1975), no. 03, 561–567.
- [Tho87] D. J. Thomson, *Criteria for the selection of stochastic models of particle trajectories in turbulent flows*, *J. Fluid Mech.* 180 (1987), 529–556.
- [TI03] Y. Tsuji and T. Ishihara, *Similarity scaling of pressure fluctuation in turbulence*, *Phys. Rev. E* 68 (2003), no. 2, 026309.
- [TP02] A. G. G. M. Tielens and E. Peeters, *Heating of the Interstellar Medium*, *EAS Publ. Ser.* (M. Giard, J.-P. Bernard, A. Klotz, and I. Ristorcelli, eds.), *EAS Publ. Ser.*, vol. 4, 2002, pp. 43–43.
- [TVB99] V. N. Tsytovich, S. V. Vladimirov, and S. Benkadda, *Dust-plasma sheath : A new dissipative self-organized structure*, *Phys. Plasmas* 6 (1999), 2972–2975.
- [UF70] M.S. Uberoi and P. Freymuth, *Turbulent energy balance and spectra of the axisymmetric wake*, *Phys. Fluids* 13 (1970), 2205–2210.
- [VD82] M. Van Dyke, *An album of fluid motion*, *Parabolic Press, Stanford, USA*, 1982.
- [VLCB02] G. A. Voth, A. La Porta, A. M. Crawford, and E. Bodenschatz, *Measurement of particle accelerations in fully developed turbulence*, *J. Fluid Mech.* 469 (2002), 121–160.
- [VPL11] M. Vo skuhle, A. Pumir, and E. L ev eque, *Estimating the collision rate of inertial particles in a turbulent flow : Limitations of the*, 13th European Turbulence Conference (ETC13), vol. 318, *J. Phys. Conf. Ser.*, no. 5, IOP Publishing, 2011, p. 052024.
- [WBC01] G. Wurm, J. Blum, and J. E. Colwell, *Aerodynamical sticking of dust aggregates*, *Phys. Rev. E* 64 (2001), no. 4, 046301.
- [WC83] J. J. E. Williams and R. I. Crane, *Particle collision rate in turbulent flow*, *Int. J. Multiphase Flow* 9 (1983), no. 4, 421–435.
- [Wei77] S. Weidenschilling, *Aerodynamics of solid bodies in the solar nebula*, *Mont. Not. R. Astr. Soc.* 180 (1977), 57–70.
- [WF94] J.-S. Wu and G. M. Faeth, *Sphere wakes at moderate Reynolds numbers in a turbulent environment*, *AIAA Journal* 32 (1994), no. 3, 535–541.
- [WM93] L.-P. Wang and M. R. Maxey, *Settling velocity and concentration distribution of heavy particles in homogeneous isotropic turbulence*, *J. Fluid Mech.* 256 (1993), 27–68.
- [WM03] M. Wilkinson and B. Mehlig, *Path coalescence transition and its applications*, *Phys. Rev. E* 68 (2003), 040101.
- [WM05] ———, *Caustics in turbulent aerosols*, *Europhys. Lett.* 71 (2005), 186.
- [WMG10] M. Wilkinson, B. Mehlig, and K. Gustavsson, *Correlation dimension of inertial particles in random flows*, *Europhys. Lett.* 89 (2010), 50002.
- [WM OD07] M. Wilkinson, B. Mehlig, S.  ostlund, and K. Duncan, *Unmixing in random flows*, *Phys. Fluids* 19 (2007), 113303.
- [WMV06] M. Wilkinson, B. Mehlig, and Bezuglyy V., *Caustic activation of rain showers*, *Phys. Rev. Lett.* 97 (2006), 048501.
- [WWY00] L.-P. Wang, A. S. Wexler, and Zhou Y., *Statistical mechanical description and modelling of turbulent collision of inertial particles*, *J. Fluid Mech.* 415 (2000), 117–153.

- [WWZ98] L.-P. Wang, A. S. Wexler, and Y. Zhou, *On the collision rate of small particles in isotropic turbulence. I. Zero-inertia case*, Phys. Fluids 10 (1998), no. 1, 266–276.
- [XBOB06] H. Xu, M. Bourgoïn, N. Ouellette, and E. Bodenschatz, *High order Lagrangian velocity statistics in turbulence*, Phys. Rev. Lett. 96 (2006), 024503.
- [XWG08] Y. Xue, L.-P. Wang, and W. Grabowski, *Growth of cloud droplets by turbulent collision-coalescence*, J. Atmos. Sci. 28 (2008), 331–356.
- [YB04] P.-K. Yeung and M. S. Borgas, *Relative dispersion in isotropic turbulence. Part 1. Direct numerical simulations and Reynolds-number dependence*, J. Fluid Mech. 503 (2004), 92–124.
- [YL03] H. Yan and A. Lazarian, *Grain Acceleration by Magnetohydrodynamic Turbulence : Gyroresonance Mechanism*, Astrophys. J. Lett. 592 (2003), L33–L36.
- [You02] L.-S. Young, *What are SRB measures, and which dynamical systems have them ?*, J. Stat. Phys. 108 (2002), 733–754.
- [ZA03] L. I. Zaichik and V. M. Alipchenkov, *Pair dispersion and preferential concentration of particles in isotropic turbulence*, Phys. Fluids 15 (2003), 1776–1787.
- [ZSA03] L. I. Zaichik, O. Simonin, and V. M. Alipchenkov, *Two statistical models for predicting collision rates of inertial particles in homogeneous isotropic turbulence*, Phys. Fluids 15 (2003), no. 10, 2995–3005.